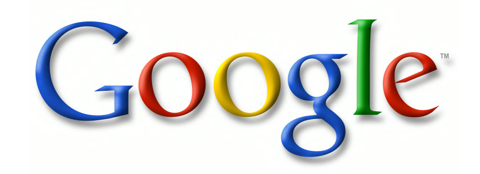
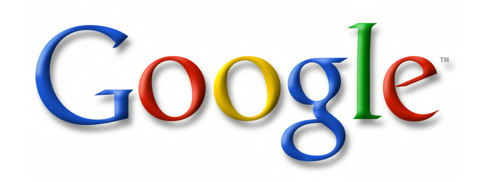
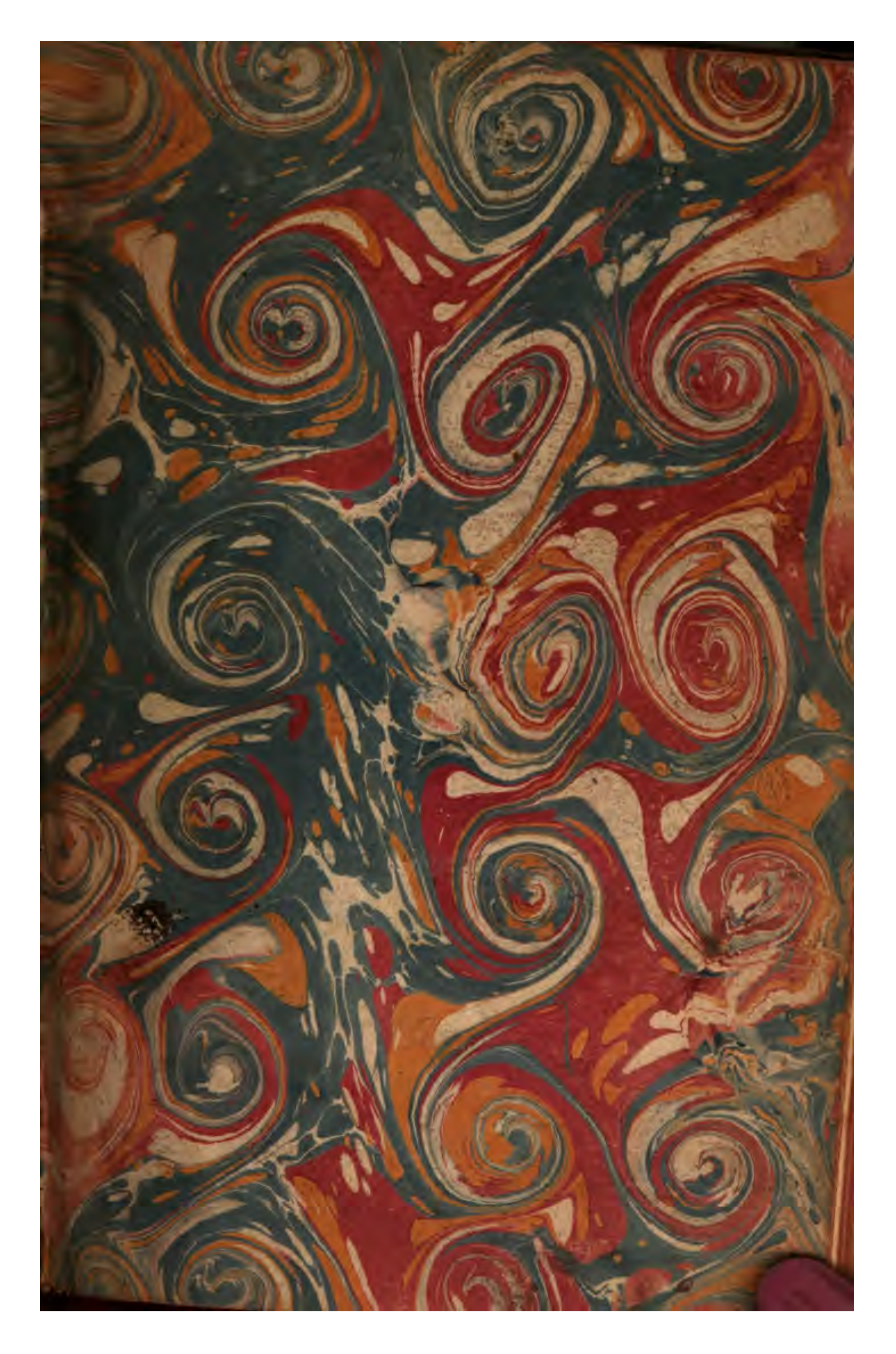
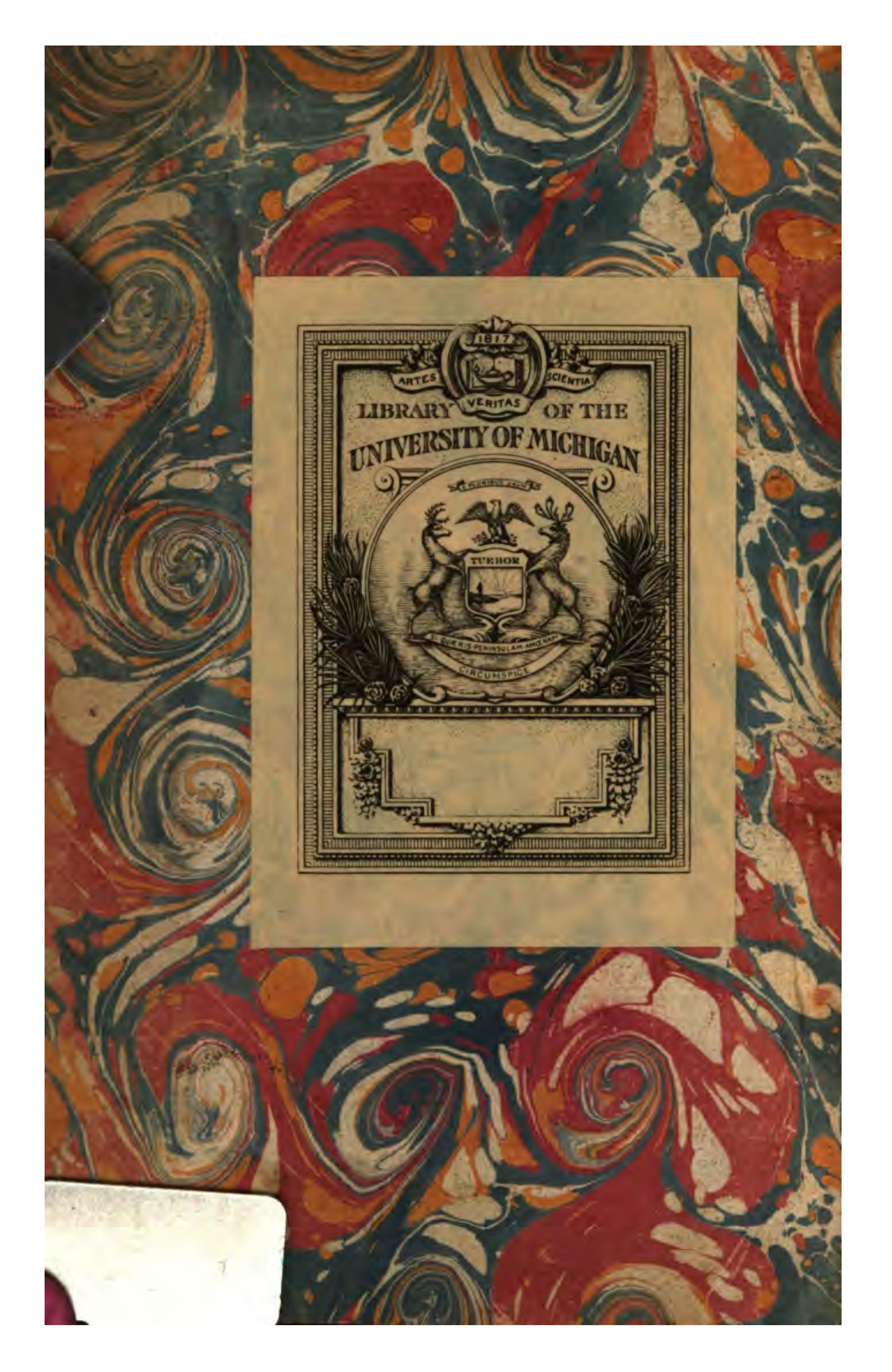


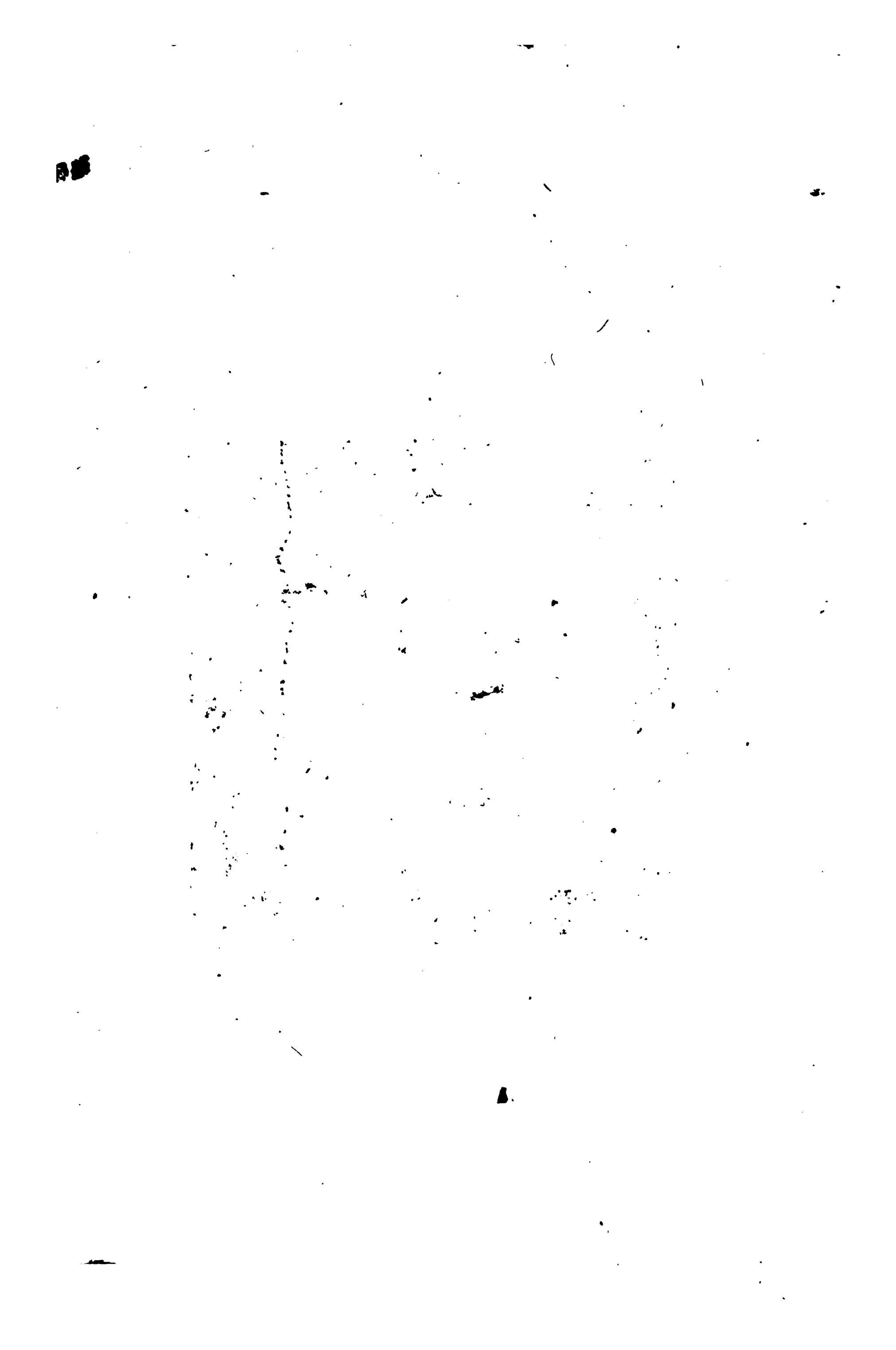



1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE









INSTITUTIONS DE GÉOMÉTRIE,

ENRICHIES

DE NOTES CRITIQUES ET PHILOSOPHIQUES

SUR LA NATURE ET LES DÉVELOPPEMENS de l'Esprit humain :

AVEC UN DISCOURS SUR L'ETUDE des Mathématiques, où l'on essaye d'établir que les Enfans sont capables de s'y appliquer, augmenté d'une Réponse aux Objections qu'on y a faites.

OUVRAGE UTILE, NON-SEULEMENT à ceux qui veulent apprendre ou enseigner les Mathématiques par la voie la plus naturelle, mais encore à toutes les Personnes qui sont chargées de quelque Éducation.

Par M. DE LA CHAPELLE, Censeur Royal, de l'Académie de Lyon, & de la Société Royale de Londres.

TROISIÈME ÉDITION,

Considérablement augmentée par l'Auteur.

TOME SECOND.



A PARIS,

Chez DEBURE l'Aîné, Libraire, Quai des Augustins, à l'Image S. Paul.

M. DCC. LVII.

Avec Approbation & Privilège du Roi.

TABLE

DES CHAPITRES, ET DES PRINCIPALES Matières contenues dans le second Tome des Institutions de Géométrie.

LIVRE II.

LIVRE III.

LIVRE IV.

Où l'on traite de la Mesure des Solides.

Fin de la Table des Matières.

Fautes essentielles à corriger avant que de lire ce second Tome des Institutions.

PAges.	Lignes.	
101	10	$\frac{b^3}{c}$ *lisez* $\frac{b^3}{c^3}$
111	lig.	pénult. 4. *lisez* . . 8.
115	28.	1 . 18 : : 18. 164. *lisez* . . 1 . 18 : 18 . 164.
126	6.	1 . 14 : : 12 . 18. *lisez* . . 1 . 14 : 12. 18.
Ibidem.	8.	1 . 212 : : 12 . 18. *lisez* . . 1 . 212 : 12 . 18.
294	31.	le Point F G. *lisez* . . le Point G.
302	6.	Triangulaire, *lisez* . . Quadrangulaire.
305	19.	$\frac{Cr}{R}$ *lisez* . . . $\frac{Cr^2}{R}$. comme on peut le revoir à *la page* 194. *du premier Tome*, où cette division a été détaillée.

Fautes non essentielles.

106	26.	c'est pourquo, *lisez* . . . c'est pourquoi.
110	lig.	dernière . . extrême, *lisez* . . . extrêmes.
176	2.	Trianglee, *lisez* . . . Triangles.
177	9.	BC bc, *lisez* . . .B C. b C.
233	4.	pas, *lisez* . . . par.
241	16	de la note . . . quand on a, *lisez* . . . quand on en a.
244	33.	Figure *x* . . . *lisez* . . . Figure X.
Ibidem.	35.	on le, *lisez* . . . on la.
355	29	de la note . . . valureut, *lisez* . . . valurent.

SUITE



SUITE DES INSTITUTIONS.

LIVRE II.

CHAPITRE PREMIER.

Principes de l'Arpentage. Mesure des Terreins.

149. Usqu'a présent nous n'avons considéré que les angles & les lignes qui entrent dans la composition d'une figure. Ce ne sont-là, pour ainsi dire, que les dehors qui doivent nous conduire à son intérieur. Il importe extrêmement de sçavoir évaluer la surface renfermée au dedans d'une figure. Par-là on assûre à chaque membre d'une société les possessions que les Loix lui attribuent. L'intérêt & le bon ordre se retrouvent encore ici les motifs qui ont déterminé les hommes à rechercher une méthode de mesurer avec éxactitude une portion de terre, un jardin,

un champ, une plaine. L'art de faire ces mesures s'appelle *Arpentage*, ou mesure des terreins (*a*) dont nous allons donner les principes, afin de nous étendre avec connoissance de cause sur les pratiques qui font le principal objet de l'Arpentage.

150. Rappellons-nous le problême 39. (n°. 111.) où nous avons enseigné la manière de faire passer une circonférence de cercle par trois points qui ne sont pas sur une même ligne droite. Il est clair que si l'on transportoit ces trois points sur une autre surface que celle où on les a d'abord supposés, & qu'on les mît les uns à l'égard des autres précisément dans la même distance où ils étoient sur le premier plan; il est clair, dis-je, (*b*) que la nouvelle circonférence, que l'on feroit passer par ces trois points, feroit entiérement égale à la première, puisque la disposition de ces points est sup-

(*a*) J'ai vû partout conter une histoire sur l'origine de l'Arpentage, que l'on me permettra de traiter de fabuleuse, ou de supposée. Les Egyptiens, dit-on, sont les Inventeurs de la Géométrie, parce que le débordement du Nil, qui couvre réguliérement tous les ans le terrein de l'Egypte, confondant toutes les bornes qui servent aux Particuliers à reconnoître & à déterminer l'étendue de leurs champs, c'étoit une nécessité d'avoir une mesure précise qui rendît à chacun ce qui lui appartenoit; ainsi les prémiers Egyptiens, suivant cette opinion, furent obligés de penser à la manière d'évaluer la surface d'un champ; d'où nous est venu l'Art de l'Arpentage ou de la Géométrie.

Ne seroit-il pas plus sage d'attribuer l'origine de la Géométrie à la cupidité générale des hommes, à la distinction forcée du tien & du mien, à leurs passions? La crainte d'être mal & l'envie d'être mieux ont invité les hommes à former des Sociétés; l'excès de leurs passions a imposé la nécessité aux plus sages ou aux plus forts d'entr'eux d'établir des Loix, pour retenir chaque membre dans les bornes que l'on a jugé à propos de leur prescrire. Il a donc fallu faire des divisions, & penser par conséquent à l'art de les exécuter. Voilà, je crois, l'origine de l'Arithmétique & de l'Arpentage, qui ont dû prendre naissance dans tous les lieux de la terre, où il s'est formé des Sociétés.

On se gardera donc bien d'amuser les jeunes gens à toutes ces petites histoires sur l'origine des Sciences & des Arts; cela n'est propre qu'à rétrécir l'esprit: à moins qu'on ne leur en parle, pour en montrer le frivole.

(*b*) Ceux qui ne feront pas pleinement satisfaits de cette supposition, pourront la prouver par le moyen de la deuxième Démonstration de la Proposition quatorze, *page* 4.

posée précisément la même que celle qu'ils avoient auparavant.

Faisons aussi attention qu'à cause de l'uniformité de la circonférence circulaire, les cordes égales tracées dans un même cercle, ou dans des cercles égaux, retranchent ou soutiennent des arcs égaux.

Ces deux vérités sont si palpables, que c'est les avoir démontrées que d'y avoir fait penser.

PROPOSITION XIV.

151. Deux Triangles ABC, CDM, (*fig.* 1.) dont tous les côtés sont égaux, chacun à chacun, sont égaux en surface. Pour peu que l'on réfléchisse sur cette proposition, on peut la mettre au nombre des Axiomes. Voici néanmoins comme je la démontre.

DÉMONSTRATION.

Comme l'on suppose que les côtés de ces Triangles sont égaux, chacun à chacun, c'est-à-dire, que AB=CD; BC=DM; AC=CM; si l'on démontre de plus que les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre, chacun à chacun, il est évident que ces deux Triangles seront égaux en tout. Circonscrivons une circonférence à chacun de ces Triangles; les deux circonférences seront égales (n°. 150.), puisque les trois points A, B, C ont précisément la même disposition que les trois points C, D, M. Dans ce cas les trois côtés du Triangle ABC deviendront des cordes, aussi-bien que les trois côtés du Triangle CDM: ces cordes sont, par la supposition, égales, chacune à chacune; ainsi les arcs soutenus par ces cordes seront égaux, chacun à chacun (n°. 150.); & par conséquent les moitiés de ces arcs seront aussi égales, chacune à chacune: or ce sont les moitiés de ces arcs qui mesurent les angles des deux Triangles ABC, CDM (Prop.

13. n°. 104.); donc les angles du Triangle A B C sont égaux aux angles du Triangle C D M, chacun à chacun : ces deux Triangles ne différent donc ni par leurs angles ni par leurs côtés; ils sont donc parfaitement égaux, C. Q. F. D.

Ceux qui ne seront pas aussi scrupuleux que je le suis de déduire leurs propositions immédiatement les unes des autres, & qui se soucieront peu de faire servir la treizième proposition à la démonstration de la quatorzième, pourront démontrer cette proposition de la manière suivante.

AUTRE DÉMONSTRATION de la Proposition 14.

Il est certain que deux figures sont égales en surface, quand elles sont construites, ou qu'elles sont engendrées précisément de la même manière & avec les mêmes dimensions : or, si l'on vouloit engendrer ou construire un Triangle avec les trois lignes A B, A C, B C, on agiroit précisément de même que si on avoit à le construire avec les trois lignes C D, C M, D M, (n°. 76.); il en résulteroit donc la même chose, C. Q. F. D.

La converse de cette proposition est fausse : c'est-à-dire, il est faux que des Triangles égaux en surface ayent tous leurs côtés égaux, chacun à chacun. On le prouvera n°. 177.

152. Ceci supposé, il y a deux choses à observer dans l'étendue d'un terrein, sa longueur & sa largeur : ainsi par la connoissance de ces deux dimensions, on doit évaluer toutes sortes de terreins. Cette évaluation n'opposeroit pas de grandes difficultés, si la surface d'une portion de terre étoit uniformément étendue en long & en large, comme la figure A B C D, (*fig. 2.*) où les longueurs A B, D C, sont égales, de même que les largeurs A D,

BC le sont aussi : de sorte que toute l'étendue de cette figure est déterminée par la connoissance d'une seule longueur & d'une seule largeur. Quand les deux dimensions sont égales, comme dans le quarré, l'opération est encore plus simple : mais il est rare que la nature, sans le secours de l'art, offre une régularité si parfaite ; pour l'ordinaire une surface, qui se présente à mesurer, ne conserve aucune uniformité, ni dans sa longueur ni dans sa largeur. Telle est la figure 3. Il est donc besoin de la rappeller à une figure plus simple, ou de la décomposer en plusieurs figures, dont on puisse avoir facilement la mesure. Il est évident qu'en tirant des lignes d'un point D aux angles A, B, la figure A B C D E se trouvera divisée en trois Triangles, & que s'il y a une méthode commode de mesurer le Triangle, quelqu'irrégulière que soit une figure, on en aura la mesure en prenant la valeur de tous les Triangles qui la composent. Mais le Triangle lui-même est encore une figure assez bisarre : il n'est ni également long, ni également large ; il faut donc recourir à quelqu'autre figure qui ait cette propriété, & dont le Triangle soit une partie connue. Or c'est ce qu'ont fait les Géomètres : ils ont considéré un *quadrilatère*, ou une figure de quatre côtés (*fig.* 2.) dont les côtés opposés A B, D C sont parallèles, de même que les côtés A D, B C ; ce qui fait que la longueur & la largeur de cette figure sont uniformes, puisque les parallèles, pendant tout leur cours, gardent entr'elles une égale distance. La figure A B C D est un *parallélogramme*.

153. Ensuite ils ont remarqué qu'une ligne menée d'un angle D à l'angle B opposé, & qu'ils ont nommée *Diagonale*, divisoit le parallélogramme en deux Triangles B A D, B C D égaux entr'eux, puisque tous les côtés de l'un sont égaux à tous les

côtés de l'autre, chacun à chacun : car A B = C D, & B C = A D ; la ligne D B est commune à l'un & à l'autre Triangle. Ainsi le Triangle B A D = le Triangle B C D (nº. 151.)

154. D'où il suit, que l'on peut toujours considérer un Triangle quelconque comme la moitié d'un parallélogramme ; par exemple, le Triangle A B C, (*fig.* 4.) se trouvera la moitié du parallélogramme A B C D, en menant par le point C la ligne C D égale & parallèle à la ligne A B, & tirant du point A au point D la ligne A D.

155. Il suffit donc de sçavoir mesurer le parallélogramme, dont la longueur & la largeur sont des dimensions uniformes, pour avoir avec précision la juste mesure des Terreins les plus bisarres, pourvû néanmoins qu'ils soient terminés par des lignes droites : car on peut les réduire en Triangles, & rapporter les Triangles aux parallélogrammes dont ils sont la moitié. De sorte donc que toute la Théorie de l'Arpentage se réduit à trouver une méthode de mesurer la surface d'un parallélogramme, ce qui ne doit pas être fort difficile à cause de l'uniformité de ses dimensions.

156. Le parallélogramme peut être *droit* ou *oblique*. On appelle parallélogramme droit, celui qui a tous ses angles droits ; telle est la figure 5. que l'on nomme encore un *réctangle*, lorsqu'elle est plus longue que large. C'est un *quarré*, si la longueur est égale à la largeur.

157. On a donné le nom de parallélogramme oblique à celui dont les angles sont aigus & obtus, parce que ses angles sont formés par des lignes obliques. La figure 6. est un parallélogramme oblique, que l'on appelle en particulier *Rhomboïde*, lorsque ses deux dimensions sont inégales ; mais on nomme *Rhombe* ou *Losange* le parallélogramme oblique qui

a tous ses côtés égaux, comme la figure 7.

158. En général tout quadrilatère qui a seulement deux côtés parallèles, comme la figure 9. est appellé *Trapèse*; & s'il n'a aucun de ses côtés parallèles, c'est un *Trapésoïde*.

Le Trapèse n'ayant point ses dimensions uniformes, ne sçauroit être mesuré par lui-même; il faut le réduire au Triangle qui, comme nous l'avons déja observé, se rapporte lui-même au parallélogramme.

Avant que d'en venir à la mesure du parallélogramme, donnons l'art de le construire dans tous les cas, & observons quelques-unes de ses propriétés.

PROBLÊME LXVI.

159. Construire un Réctangle (*fig.* 10.) dont deux côtés A B, B D contigus (*a*) sont donnés.

RÉSOLUTION.

Sur la ligne A B, élevez perpendiculairement B D: ensuite du point D avec la ligne A B, décrivez un arc; & du point A avec la ligne B D tracez-en un autre qui coupe le premier au point C. Tirez A C & C D; vous aurez le Réctangle A B D C, dont les côtés A B, B D sont donnés.

DÉMONSTRATION.

Il s'agit de prouver que les côtés opposés de cette figure sont parallèles, & que tous les angles sont droits.

Considérons les deux Triangles A B D, A C D; tous les côtés de l'un sont égaux à tous les côtés de l'autre, chacun à chacun: ainsi les angles opposés à des côtés égaux sont égaux: par conséquent, l'angle B étant droit, l'angle C l'est aussi; de même,

(*a*) *Contigus*, c'est-à-dire, dont la rencontre mutuelle forme un angle.

l'angle C D A = l'angle D A B : or deux lignes également inclinées sur une troisième sont parallèles (n°. 55.); donc A B est parallèle à C D. A B est perpendiculaire sur B D ; C D l'est donc aussi ; & par conséquent l'angle C D B est un angle droit. Mais comme l'Angle C A D est encore égal à l'Angle A D B, à cause que ces deux angles sont opposés aux côtés égaux A B, C D, il s'ensuit que C A est parallèle à D B (n°. 55.), laquelle étant perpendiculaire sur A B, il est nécessaire que C A le soit aussi (n°. 56.); ainsi l'angle C A B est droit, d'où il suit que la figure A B C D est un réctangle, puisqu'elle a ses côtés opposés parallèles, & tous ses angles droits.

PROBLÊME LXVII.

160. Construire un Rhomboïde, ou un Parallélogramme oblique plus long que large (*fig.* 11.), dont deux des côtés A B, B D sont donnés, avec l'angle A B D compris entre ces côtés.

RÉSOLUTION.

Faites l'angle O M G = l'angle A B D ; soit M G = A B & M O = B D : du point G avec MO, décrivez un arc ; & du point O avec G M, décrivez-en un autre qui coupe le premier au point S ; tirez les lignes O S, G S : le Rhomboïde O M G S sera tel qu'on le demande ; ce qui se démontre, comme ci-devant, en tirant la diagonale M S.

PROBLEME LXVIII.

161. Construire un Rhombe, ou un Losange (*fig.* 12.) avec la ligne A B & l'angle A B C.

RÉSOLUTION.

On sçait que tous les côtés du Losange doivent être égaux, & ses angles obliques.

Sur la ligne C D = A B, faites l'angle F C D égal à l'angle A B C; que le côté C F = C D, & des points D, F, avec la ligne C D, décrivez des arcs qui se coupent en G : la figure C D G F sera un Losange qui aura les conditions données. Sa construction est assez claire.

Préparation à la mesure du Rectangle.

162. De même qu'il a fallu convenir d'une certaine longueur, qui servît de mesure commune à toutes les longueurs que l'on auroit à mesurer; il a été besoin aussi de déterminer une surface, à laquelle on dût rapporter toutes les surfaces que l'on voudroit évaluer, & ce modèle d'évaluation a dû être le plus simple qu'il étoit possible. La figure quarrée a toute la simplicité que l'on peut désirer: les angles droits étant invariables, un seul côté suffit à la détermination du quarré; c'est donc avec raison qu'on l'a choisi pour être le modèle d'évaluation de toutes les surfaces, c'est-à-dire, qu'une surface sera jugée plus ou moins grande, à proportion qu'elle contiendra plus ou moins de fois le modèle qui servira à l'estimer.

163. Nous avons employé les toises, les pieds, les pouces, les lignes, les points à la mesure des longueurs : nous nous en servirons encore à l'évaluation des surfaces; mais alors on doit entendre des toises quarrées, des pieds quarrés, &c. Une toise quarrée est une surface quarrée, qui a une toise en long & une toise en large. Le pied quarré est aussi une surface longue d'un pied & large d'autant; entendez la même chose du pouce quarré, de la ligne quarrée, & du point quarré. Les Arpenteurs ou les Artisans appellent *des toises courantes, des pieds courants*, &c les toises ou les pieds avec lesquels on mesure les longueurs, pour les distinguer des toises

quarrées ou des pieds quarrés qui servent à mesurer les surfaces.

164. Quand il faut mesurer une étendue considérable de terrein, en l'évaluant en toises, le nombre qui en exprime la valeur, devient si grand, qu'il apporte de l'embarras dans le calcul : c'est pourquoi on a établi des mesures plus grandes que la toise. Les plus ordinaires ou les plus généralement connues sont la *perche* & *l'arpent*. La perche varie suivant les différentes Coutumes ; c'est à celui qui va faire des Arpentages dans un pays, d'en prendre connoissance chez le Juge du lieu : à Paris la perche contient trois toises, ou dix-huit pieds ; pour les travaux Royaux, elle a vingt-deux pieds. Ainsi la perche quarrée, mesure de Paris, est un quarré qui a trois toises de long sur trois toises de large. L'arpent contient cent perches quarrées, c'est-à-dire, en le considérant comme un quarré, qu'il contient dix perches de longueur sur dix perches de largeur ; ainsi que nous allons le démontrer par le Problême suivant.

PROBLÊME LXIX.

165. Déterminer la surface d'un réctangle qui a huit toises de long sur cinq toises de large, (*fig.* 13.)

RÉSOLUTION.

Multipliez la longueur 8 par la largeur 5 : le produit 40 indiquera que le Réctangle A B C D contient 40 toises quarrées.

DÉMONSTRATION.

Divisez le côté A B en huit parties égales, qui représenteront les huit toises en longueur que contient le Réctangle. Divisez aussi en cinq parties égales sa largeur A D. Par les points de division de la

longueur AB, tirez des parallèles à la ligne AD; & par chaque point de division de la largeur AD, menez des parallèles à la longueur AB: il est évident que ces lignes par leur mutuelle interſection donneront des toiſes quarrées, puiſque, (conſt.) chaque petite ſurface AOSX eſt auſſi longue que large, AO & AX repréſentant chacune une toiſe, & l'angle A qu'elles forment étant droit, par la ſuppoſition; mais la bande ABMX contient huit petits quarrés: il y a cinq bandes égales à celle-ci; on a par conſéquent 5 fois 8 = 40 petits quarrés qui repréſentent 40 toiſes quarrées. Pour déterminer la valeur d'un Réctangle, il ſuffit donc de multiplier ſa longueur par ſa largeur, C. Q. F. D. (*a*).

166. Puiſque l'on évalue en toiſes quarrées la ſurface d'un Réctangle qui a 8 toiſes de baſe ſur 5 de hauteur, en multipliant 8 par 5, il s'enſuit que l'on trouvera auſſi la valeur d'une toiſe quarrée en pieds quarrés, en multipliant ſa longueur 6 par ſa largeur 6 = 36 pieds quarrés, c'eſt-à-dire, 36 petites ſurfaces qui ont chacune un pied de long ſur un pied de large. Par la même raiſon un pied quarré = 144 pouces quarrés; car un pied quarré a 12 pouces de longueur ſur 12. pouces de largeur: or 12 fois 12 = 144; par conſéquent la toiſe quarrée contient

(*a*) Il ſera facile de faire remarquer aux Commençans, que la plus grande partie de nos appartemens ſont des Réctangles. En général les Ouvrages de l'Art ſont des figures régulières ou ſimétriques, parce qu'elles ſont plus agréables, plus commodes, & même plus économiques. L'ame embraſſe d'une ſeule vûe une conſtruction ſimétrique, elle ſe la rappelle avec facilité, l'eſprit n'a point à travailler, il n'a, pour ainſi dire, qu'à jouir. Voilà la ſource de l'agrément.

La commodité eſt une ſuite de la régularité ou de la ſimétrie; une forme ſimétrique étant déterminée, il eſt plus aiſé de s'arranger que de changer à chaque inſtant de diſpoſition, comme on y eſt forcé dans les emplacemens biſarres.

Entre les formes régulières ou ſimétriques, le Réctangle a dû avoir la préférence, parce que le corps de l'homme fait naturellement un angle droit, lorſqu'il ſe tient debout; c'eſt l'aſſiette la plus ſolide, ainſi que nous l'avons obſervé dans un autre endroit.

36 fois 144 pouces quarrés = 5184 pouces quarrés. Le pouce quarré ayant aussi 12 lignes de long sur 12 lignes de large, vaudra 144 lignes quarrées, & si l'on divise la ligne courante en 12 parties que l'on appelle *points*, la ligne quarrée contiendra 144 points quarrés. En calculant toujours sur le même principe, la perche quarrée (mesure de Paris) = 9 toises quarrées, puisqu'elle contient 3 toises de long sur 3 toises de large; enfin l'arpent ayant 10 perches en longueur & 10 perches en largeur, doit valoir 100 perches quarrées: car 10 fois 10 = 100; ce que nous avions promis de démontrer sur la fin du n°. 164.

Afin que ces mesures se trouvent plus facilement au besoin, nous allons en faire une Table méthodique.

TABLE des mesures les plus usitées dont on se sert dans l'Arpentage, ou la mesure des Terreins.

L'arpent vaut	100.	perches quarrées, ou
	900.	toises quarrées.
La perche courante	3.	toises courantes, ou
	18.	pieds.
La perche quarrée	9.	toises quarrées, ou
	324.	pieds quarrés.
La toise courante	6.	pieds courans, ou
	72.	pouces.
La toise quarrée	36.	pieds quarrés.
Le pied courant	12.	pouces courans.
Le pied quarré	144.	pouces quarrés.
Le pouce courant	12.	lignes courantes.
Le pouce quarré	144.	lignes quarrées.
La ligne courante	12.	points courans.
La ligne quarrée	144.	points quarrés.

167. Les Géomètres appellent ordinairement la

longueur d'un Réctangle *sa base*, & *hauteur* ce que nous avons nommé largeur ; de sorte que chez eux, multiplier la base par la hauteur, est la même chose que multiplier la longueur par la largeur. En général on prend pour base d'un Parallélogramme ou d'un Triangle le côté sur lequel on abbaisse une perpendiculaire de l'angle opposé.

PROBLÊME LXX.

168. Mesurer la surface du Triangle réctangle A B C (*fig.* 14.), dont la base = 7 pieds & la hauteur 3.

RÉSOLUTION.

On sçait qu'un Triangle réctangle est celui qui a un angle droit.

Multipliez la base B C par la hauteur A B, c'est-à-dire, 7 par 3 = 21 ; & prenez la moitié de ce produit = $10\frac{1}{2}$: cette moitié est la valeur en toises quarrées du Triangle réctangle A B C.

DÉMONSTRATION.

Par le point C tirez C D, égale & parallèle à B A, & menez A D : on aura alors le Réctangle A B C D, dont le Triangle A B C est la moitié ; mais pour avoir la valeur du Réctangle A B C D, il faut multiplier la base 7 par sa hauteur 3, & prendre le produit 21 tout entier (n°. 165.) ; on aura donc la mesure de la moitié de ce Réctangle, c'est-à-dire, la mesure du Triangle A B C, en prenant la moitié du produit 21 = $10\frac{1}{2}$, C. Q. F. D.

169. Si toutes les figures irrégulières pouvoient se diviser en Triangles Réctangles, toute la théorie de la mesure des terreins se trouveroit renfermée dans les Problêmes 69 : 70. Mais, comme il est fort rare de trouver cet avantage ; que les Triangles *mesura-*

bles sont presque tous acutangles ou obtusangles; que par-là ils appartiennent à des parallélogrammes obliques dont ils sont la moitié, comme on peut le voir par la figure 15. où le Triangle ABC obtusangle en B est la moitié du parallélogramme oblique ABCD, les premiers Géomètres se mirent à rechercher les moyens de mesurer les parallélogrammes obliques (a), & cette découverte nous dévoiloit nécessairement tout ce qui restoit à sçavoir sur la mesure des surfaces planes terminées par des lignes droites. En cas que le parallélogramme oblique eût quelque rapport au Réctangle, & que l'on pût déterminer ce rapport, la mesure du Réctangle étant au monde ce qu'il y a de plus simple, on avoit, avec toute l'élégance possible, tout ce que l'on pouvoit désirer sur cette matière. Or c'est ce qui a été découvert; on a trouvé qu'un parallélogramme oblique étoit parfaitement égal à un Réctangle de même base, & de même hauteur que l'oblique. Démontrons cette vérité si belle, parce qu'elle est si utile. On se rappellera que la hauteur d'un point au-dessus d'une ligne, d'un objet au-dessus d'un plan, s'estime nécessairement par la perpendiculaire qui tombe sur la ligne au-dessus de laquelle ce point s'élève; par exemple, que la hauteur du point D (*fig. 16.*) au-dessus de la ligne AB, n'est pas la ligne DA, mais la perpendiculaire DM, qui est le plus court chemin du point D à la ligne AB. Il faut aussi faire attention qu'être situé entre mêmes parallèles, signifie précisément la même chose qu'être de même hauteur;

(a) Le Parallélogramme oblique ne sçauroit être pris pour servir de mesure commune à toutes les surfaces, parce qu'une toise en Losange ne seroit pas une figure déterminée; elle auroit plus ou moins de surface à proportion que ses angles obtus seroient plus ou moins ouverts. Ensorte qu'on pourroit la réduire presqu'à rien, en rendant ses angles extraordinairement obtus: au contraire la toise quarrée, en gardant toujours la longueur de ses côtés, ne sçauroit avoir ni plus ni moins de surface qu'elle en a.

parce que les parallèles gardent toujours entr'elles une égale distance; mais l'inverse de cette proposition est fausse: car on peut être de même hauteur sans être situé entre mêmes parallèles.

PROPOSITION XV.

170. Le parallélogramme oblique ABCD (*fig.* 16.) est égal en surface à un parallélogramme Réctangle de même base & de même hauteur; c'est-à-dire, dont la base est égale à la base de l'oblique, & la hauteur égale à la hauteur de l'oblique.

DÉMONSTRATION.

Abbaissez la perpendiculaire DM sur AB, & la perpendiculaire CO sur le prolongement BO. Ces perpendiculaires sont égales, étant entre mêmes parallèles; & elles forment le Réctangle DMOC, dont la base MO = DC = AB, base du parallélogramme oblique. Ainsi les deux parallélogrammes ABCD, DMOC, ont même base & même hauteur; or il est évident que ces deux parallélogrammes sont égaux: car ils sont composés chacun de deux surfaces égales, chacune à chacune. Le Réctangle DMOC contient le Triangle CBO, & le Trapèse DMBC; de même le parallélogramme oblique ABCD contient le Trapèse DMBC, & le Triangle DAM égal au Triangle CBO, à cause que tous leurs côtés sont visiblement égaux, chacun à chacun: car (par la const.) BC = AD; CO = DM. Il reste donc à démontrer que BO = AM. Remarquez que MB + BO = DC. Or DC = AM + MB; parce que (n°. 153.) les côtés opposés d'un parallélogramme sont égaux. Ainsi MB + BO = AM + MB; & ôtant MB de part & d'autre, on a BO = AM; donc le Triangle DAM est égal au Triangle CBO

(n°. 151.); par conſéquent le parallélogramme oblique A B C D eſt égal au Réctangle D M O C, qui a même baſe & même hauteur, C. Q. F. D.

Cette Démonſtration me paroît beaucoup plus ſimple que celle des Anciens, que l'on trouve dans tous les Livres des Modernes. Néanmoins on peut encore la reſſerrer.

Démonſtration plus conciſe.

La perpendiculaire D M retranche le Triangle D M A; mais l'autre perpendiculaire C O ajoute le Triangle C B O = D M B; on regagne donc d'un côté ce que l'on perd de l'autre, & par conſéquent l'égalité ſubſiſte (*a*).

La converſe de cette Propoſition eſt fauſſe. Nous prouverons un peu plus bas (n°. 175.) qu'il eſt faux que des parallélogrammes égaux en ſurface, ayent néceſſairement même baſe & même hauteur.

PROPOSITION XVI.

171. Deux parallélogrammes obliques (*fig.* 17.) qui ont des baſes & des hauteurs égales, ſont néceſſairement égaux en ſurface, quoiqu'ils ſoient différemment inclinés.

DÉMONSTRATION.

Il s'agit de prouver que le parallélogramme oblique D A B C eſt égal en ſurface au parallélogramme oblique M G P X, dont la baſe & la hauteur ſont égales à la baſe & à la hauteur du parallélogramme D A B C, qui eſt moins incliné.

(*a*) Ces ſortes de Démonſtrations, qui montrent d'un coup d'œil l'eſprit de la choſe, m'ont toujours réuſſi auprès des jeunes gens : je conſeille que l'on en faſſe uſage; elles ont un air familier qui prévient. On ſe fait très-bien entendre dans une converſation, quoique les Démonſtrations ne ſoient pas auſſi régulières que dans un Livre.

Abbaiſſez

Abbaissez les perpendiculaires D O, C S, X N, P H. Par la Proposition précédente (n°. 170.), le parallélogramme oblique D A B C = le Réctangle D O S C de même base & de même hauteur. Par la même raison, le parallélogramme oblique X M G P = le Réctangle X N H P. Mais le Réctangle D O S C = le Réctangle X N H P, puisque tous les angles & tous les côtés de l'un sont égaux à tous les angles & à tous les côtés de l'autre, chacun à chacun (conft.); par conséquent les deux parallélogrammes D A B C, X M G P, différemment inclinés, mais qui ont même base & même hauteur, sont aussi égaux en surface, C. Q. F. D.

PROPOSITION XVII.

172. Les Triangles A B C, M D H, dont les bases B C, D H sont égales, & qui ont même hauteur, ont des surfaces égales, (*fig.* 18.)

DÉMONSTRATION.

Par le point C menez C S, parallèle & égale à B A, & tirez A S. Faites pareillement H G parallèle & égale à D M; tirez encore M G. Il est clair (n°. 171.) que les deux parallélogrammes A B C S, D H G M, de même base & de même hauteur, sont égaux. Or les triangles A B C, M D H sont moitiés de ces parallélogrammes égaux (n°. 154.); ces deux Triangles sont donc égaux en surface, C. Q. F. D. La converse de cette Proposition est fausse; ce que je démontrerai dans la suite (n°. 177.)

173. Il n'est pas possible de porter plus loin l'art de mesurer les Terreins. L'irrégularité la plus singulière ou la plus recherchée, peut à la vérité multiplier le travail des mains; mais elle sera toujours soumise à la méthode de mesurer les surfaces les plus simples & les plus uniformes.

Nous avons remarqué qu'il étoit facile de réduire en Triangles toute figure plane, réctiligne ou terminée par des lignes droites. Tout Triangle, de quelque nature qu'il soit, est toujours la moitié d'un parallélogramme de même base & de même hauteur. Si ce parallélogramme est oblique, comme on sçait qu'il est égal à un Réctangle de même base & de même hauteur (n°. 170.), il suffit de pouvoir mesurer le Réctangle pour avoir la mesure du parallélogramme oblique, & par conséquent celle du Triangle oblique qui en est la moitié. Or l'on a avec une extrême facilité la méthode d'évaluer la surface d'un Réctangle (n°. 163.); par conséquent l'art de mesurer les Terreins a toute la perfection que l'on peut désirer.

PROBLÊME LXXI.

174. Mesurer le parallélogramme oblique ABCD, dont on peut parcourir l'intérieur, (*fig.* 16.)

RÉSOLUTION.

De l'angle obtus D abbaissez une perpendiculaire DM sur la base AB; mesurez cette perpendiculaire, à laquelle je suppose 5 perches 2 pieds. Mesurez aussi la base AB, qui aura, si l'on veut, 14 perches 5 pieds. Après ces opérations, il ne s'agit plus que de multiplier la base AB par la hauteur DM, ou 14 perches 5 pieds par 5 perches 2 pieds, pour avoir la surface du parallélogramme ABCD en mesures quarrées.

Or voici comment on peut faire cette multiplication. Il faut commencer par réduire en pieds les deux dimensions du parallélogramme proposé. La perche courante = 3 toises ou 18 pieds, ainsi 5 perches = 5 fois 18. pieds = 90 pieds, ausquels ajoutant 2 pieds, l'on a 92 pieds pour la perpen-

diculaire D M. Réduisant de même en pieds les 14 perches de la base A B, on trouve qu'elle contient 14 fois 18 pieds = 252 pieds. Ajoutant les 5 pieds qu'il y a de plus, la base A B = 257 pieds.

Multipliez donc 257 par 92; vous aurez 23644 pieds quarrés, valeur du parallélogramme ABCD. Si vous voulez sçavoir combien il y a de perches quarrées dans 23644 pieds quarrés, il faudra diviser 23644 par 324, parce que la perche quarrée = 324 pieds quarrés, comme on le connoît en multipliant 18 pieds par 18 pieds, valeur de la perche courante. Cette division fera voir que le parallélogramme A B C D contient 72 perches quarrées, & 316 pieds quarrés, lesquels réduits en toises quarrées, en divisant 316 par 36, à cause que la toise quarrée contient 36 pieds quarrés, donneront 8 toises & 28 pieds quarrés. Ainsi le parallélogramme A B C D = 72 perches, 8 toises, 28 pieds quarrés.

DÉMONSTRATION.

Il s'agit de prouver que le parallélogramme oblique A B C D = A B × D M, c'est-à-dire, le produit de sa base par sa hauteur perpendiculaire. Or c'est ce qui est évident (n°. 170.), parce que ce parallélogramme = un Réctangle qui auroit A B pour base & D M pour hauteur. On doit donc le calculer sur le pied d'un Réctangle, ainsi qu'on l'a éxécuté, C. Q. F. D.

175. C'est ici qu'il est à propos de prouver la fausseté de la converse de la Proposition 15. (n°.170.) Je dis donc que des parallélogrammes, égaux en surface, n'ont pas nécessairement même base & même hauteur. Car un parallélogramme, dont la base = 8 toises & dont la hauteur en vaut 3, contient en toute sa surface 24 toises quarrées; mais un au-

tre parallélogramme, dont la base seroit 6 toises & la hauteur 4, auroit aussi en surface 24 toises quarrées: des parallélogrammes peuvent donc avoir des surfaces égales, sans être de même base ni de même hauteur, C. Q. F. D.

REMARQUE.

176. On observera qu'il est beaucoup plus expéditif dans la pratique d'abbaisser la perpendiculaire DM de l'angle obtus D, afin qu'elle tombe en dedans du parallélogramme, s'il n'y a point d'obstacle, que de la faire tomber de l'angle aigu C; parce qu'elle tomberoit alors en dehors du parallélogramme, ce qui exigeroit que l'on prolongeât la base AB jusqu'à la rencontre O de la perpendiculaire CO. Cette remarque est encore plus essentielle quand on opère sur un Triangle: car on ne peut alors abbaisser de perpendiculaire que du point D, au lieu que de quelque point du côté DC que l'on abbaisse une perpendiculaire sur la base AB, elle sera toujours égale à DM.

PROBLÊME LXXII.

177. Déterminer l'*aire* ou la surface du Triangle oblique ABC, (*fig.* 19.)

RÉSOLUTION.

De l'angle obtus B, si vous le pouvez, abbaissez la perpendiculaire BD, en vous servant de l'équerre d'Arpenteur; & mesurez cette perpendiculaire qui contient, par éxemple, 12 toises 1 pied 5 pouces. Mesurez aussi la base AC, où vous pourrez trouver 24 toises 8 pouces. Réduisez en pouces ces deux dimensions. Commençons par la perpendiculaire BD = 12 toises 1 pied 5 pouces. On sçait qu'une toise = 72 pouces; ainsi 12 toises = 12

fois 72 = 864 pouces, ausquels ajoutant 1 pied 5 pouces = 17 pouces, on aura 881 pouces pour la perpendiculaire B D.

Réduisons aussi en pouces la base A C = 24 toises 8 pouces, en multipliant 24 par 72 = 1728 pouces; ajoutez-y 8 pouces, la base sera 1736 pouces. Il faudroit présentement multiplier la base 1736 par la perpendiculaire 881, & prendre la moitié de ce produit, qui seroit la valeur en pouces quarrés du Triangle proposé; mais il est plus court de multiplier la moitié de la base 1736 = 868 par 881 = 764708 pouces quarrés; qui est la valeur du Triangle proposé : vous réduirez en toises quarrées les 764708 pouces quarrés, en divisant 764708 par 5184, parce que la toise quarrée contient 5184 pouces quarrés; ce qui se connoît en multipliant 72 pouces par 72 pouces. Divisant donc 764708 par 5184, on doit trouver 147 toises quarrées, & 2660 pouces quarrés, lesquels réduits en pieds quarrés, donneront 18 pieds quarrés & 68 pouces quarrés, ce que l'on trouvera en divisant 2660 par 144, à cause que le pied quarré = 12 fois 12 = 144 pouces quarrés. La valeur du Triangle A B C est donc 147 toises, 18 pieds, 68 pouces quarrés.

Si l'on veut avoir cette valeur en perches quarrées, comme la perche quarrée = 9 toises quarrées, on divisera 147 par 9, ce qui donnera 16 perches & 3 toises quarrées; de sorte que la surface du Triangle A B C contiendra 16 perches, 3 toises, 18 pieds, 68 pouces quarrés.

DÉMONSTRATION.

On doit prouver que l'on a la surface ou l'aire d'un Triangle oblique, en multipliant sa hauteur perpendiculaire par la moitié de sa base.

On peut se rappeller qu'il a été démontré (n°. 172.)

qu'un Triangle oblique est la moitié du parallélogramme oblique de même base & de même hauteur; que ce parallélogramme oblique est égal à un Réctangle de même base & de même hauteur; par conséquent un Triangle oblique est aussi la moitié d'un Réctangle de même base & de même hauteur: or, pour avoir la valeur d'un Réctangle, il faut multiplier sa base par sa hauteur; donc pour avoir la valeur du Triangle qui est sa moitié, on ne doit multiplier la hauteur que par la moitié de la base; mais c'est ce que nous avons fait. Il est donc clair que nous devons avoir la surface du Triangle proposé, C. Q. F. D.

Par la résolution de ce Problême il est facile de prouver la fausseté de la converse de la Proposition 17 (n°. 172.); je veux dire, que des Triangles qui ont des surfaces égales, n'ont pas nécessairement même base & même hauteur: car un Triangle qui auroit 10 toises de base sur 4 de hauteur, auroit en surface 20 toises quarrées; mais un autre Triangle dont la base contiendroit 8 toises & la hauteur 5, auroit aussi en surface 20 toises quarrées; par conséquent des Triangles peuvent avoir des surfaces égales, sans être de même base ni de même hauteur.

On voit aussi par cet exemple que la converse de la Proposition 14 (n°. 151.) est fausse, c'est-à-dire, qu'il n'est pas vrai que des Triangles égaux en surface ayent nécessairement tous leurs côtés égaux, chacun à chacun. (a)

(a) Nous ne devons pas aller plus loin sans tenir la parole que nous avons donnée n°. 67 Nous avons promis de dire pourquoi certaines Propositions ont des converses, pourquoi d'autres n'en ont pas, &c.

Afin qu'une Proposition puisse être convertie, il est nécessaire que cette Proposition ait deux parties, dont l'une soit la conséquence de l'autre, ou tout au moins soit regardée comme telle; par exemple. *Si l'on tire une diagonale O S dans un parallélogramme A O D S,* (*fig.* 10.) *ce parallélogramme sera divisé en deux parties égales*. Il est évident que cette Proposition a deux parties. La première, où l'on suppose que l'*on tire une*

REMARQUE.

178. On observera que l'on pouvoit multiplier la hauteur par la base toute entière; mais on n'auroit pris alors que la moitié du produit, ce qui auroit donné le même résultat : ou bien multiplier la base entière par la moitié de la hauteur, ce qui revient au même que de multiplier la hauteur par la moitié de la base; mais on doit éviter de prendre la moitié d'un nombre impair, afin de ne pas tomber dans les fractions, dont le calcul est toujours plus embarrassant que celui des nombres entiers : c'est pourquoi si la base & la hauteur du Triangle étoient exprimées par des nombres impairs, on multipliera la base par la hauteur, & la moitié de ce produit exprimera la véritable valeur du Triangle.

diagonale dans un parallélogramme; & la seconde, que l'on regarde comme une suite de la première, c'est que *ce parallélogramme sera divisé en deux parties égales*. Ainsi pour avoir la converse de cette Proposition, mettons en supposition la seconde partie. Supposons qu'*un parallélogramme soit divisé en deux parties égales* : si l'on vouloit en déduire que *ce parallélogramme ne peut être ainsi divisé que par une diagonale*, ce seroit la converse de la première Proposition; mais cette converse seroit très-fausse, parce qu'un parallélogramme peut être divisé en deux parties égales par la ligne M N tirée par le milieu des côtés A S, O D, & cette ligne M N n'est pas une diagonale. Les Géomètres appellent la première partie d'une Proposition l'*hypothèse*, c'est-à dire, les suppositions ou les données, d'où l'on déduit ce que l'on se propose d'établir : car il n'est pas possible de démontrer quelque chose à ceux qui n'accordent rien; & ils nomment *conséquence* ce qui est déduit de l'hypothèse.

On a donc un caractère pour reconnoître la vérité ou la fausseté d'une Proposition converse. Si la conséquence redonne nécessairement l'hypothèse, la converse est vraie; mais elle est fausse, lorsque l'hypothèse n'est pas une suite nécessaire de la conséquence.

On ne sçauroit convertir une Proposition, dont la conséquence dit précisément la même chose que l'hypothèse. Ainsi cette Proposition : *si l'on a un Triangle, ses trois angles sont nécessairement égaux à deux angles droits*, est une Proposition qui n'a point de converse : vous ne pouvez pas dire, *si les trois angles d'un Triangle sont égaux à deux angles droits, on aura nécessairement un triangle*, cela ne signifieroit rien; aussi ces sortes de Propositions doivent s'exprimer sans aucune condition : *les trois angles d'un triangle sont égaux à deux angles droits*; où l'on voit qu'il n'y a point de converse à faire.

179. Il peut se rencontrer quelque obstacle, qui empêche que l'on n'abbaisse une perpendiculaire de l'angle obtus B (*fig.* 21.) sur la base A C. En ce cas on prolongera l'un des deux autres côtés C B, jusqu'à ce que de l'angle opposé A, on puisse abbaisser la perpendiculaire A D sur le prolongement B D. Après quoi l'on mesurera B C, qui devient alors la base du Triangle, & A D qui en exprime la hauteur : on multipliera, comme ci devant, B C par A D. La moitié de ce produit sera la valeur du Triangle A B C.

PROBLÊME LXXIII.

180. Évaluer la surface d'un Trapèse A B C D, c'est-à-dire, d'une figure de quatre côtés, dont on en suppose deux tels que A D, B C parallèles, (*fig.*22.)

RÉSOLUTION.

De l'angle D abbaissez la perpendiculaire D M sur l'un des côtés B C parallèles, ou, s'il y a de l'obstacle, de l'angle C faites tomber la perpendiculaire C S sur le prolongement D S de l'autre côté A D parallèle. Cette perpendiculaire C S = D M, à cause de A D parallèle à B C (supp.); mesurez donc D M ou C S que vous trouverez, par exemple, de 4 perches. Mesurez aussi les côtés parallèles A D, B C. Supposons A D = 3 perches 2 toises, & B C = 6 perches 1 toise. Prenez la somme des deux côtés parallèles A D, B C = 10 perches. Multipliez 10 perches par 4 valeur de la perpendiculaire; vous aurez 40 perches quarrées, dont la moitié = 20 sera la valeur du Trapèse A B C D.

DÉMONSTRATION.

Il s'agit de prouver que l'on a la surface du Trapèse A B C D, en prenant la moitié du produit de

la somme des deux côtés parallèles A D, B C, par la perpendiculaire D M qui exprime la distance d'un côté à l'autre.

Tirez la diagonale B D : le Trapèse A B C D est alors divisé en deux Triangles A B D, D B C, qui ont même hauteur D M. Or la valeur du Triangle D B C (n°. 177.) est la moitié du produit de la base B C par la hauteur D M ; par la même raison la valeur du Triangle B A D se trouve, en prenant la moitié du produit A D par la perpendiculaire D M. Par conséquent on a la valeur de tout le Trapèse, en prenant la moitié du produit des deux bases BC, A D, par la perpendiculaire D M, qui exprime la distance d'une base à l'autre.

REMARQUE.

181. Au lieu de multiplier la somme des deux côtés parallèles par la perpendiculaire DM, & prendre ensuite la moitié de ce produit, on auroit pû multiplier seulement ces deux côtés par la moitié de la perpendiculaire, ou la perpendiculaire toute entière par la moitié de la somme de ces deux côtés, & en ce cas le produit tout entier auroit été la valeur du Trapèse ; mais on seroit tombé dans les fractions ; ce que l'on doit toujours éviter.

La résolution des Problêmes précédens suffit pour faire comprendre, comment l'on peut trouver l'aire des surfaces planes terminées par des lignes droites, de quelque nombre de côtés qu'elles puissent être : qu'elles soient régulières ou irrégulières, cela n'y fait rien ; on pourra toujours les réduire en Réctangles, en Trapèses, en Triangles : on ne les divisera même, si l'on veut, qu'en Triangles ; mais il est souvent plus commode d'y tracer des Rectangles & des Trapèses : c'est la figure du Terrein qui détermine ces sortes d'opérations, comme on va le voir dans les Problêmes suivans.

PROBLÊME LXXIV.

182. Mesurer le Quadrilatère A B C D, dont un des angles A est droit, (*fig.* 23.)

RÉSOLUTION.

On pourroit tirer une ligne de l'angle D au point B. Elle diviseroit le Quadrilatère en deux Triangles, dont on chercheroit séparément la valeur : ces deux valeurs réunies donneroient celle du Quadrilatère ; mais en s'y prenant d'une autre façon, on pourra avoir plus commodément la surface, ou l'aire du Quadrilatère A B C D. De l'angle C abbaissez la perpendiculaire C G sur le côté A B ; mesurez cette perpendiculaire : faites A M = C G ; on aura M C = A G. Par-là vous réduisez le Quadrilatère A B C D en deux triangles réctangles C G B, C M D, & au réctangle C G A M, dont il est très-facile d'avoir la valeur : car la surface du Triangle $CGB = \frac{CG \times GB}{2}$; celle du Réctangle $CGAM = CG \times GA$, ou $CG \times CM$; enfin celle du triangle $CMD = \frac{CM \times MD}{2}$: ajoutant ces trois produits ensemble, leur somme donnera la valeur du Quadrilatère A B C D. Cela n'a pas besoin de démonstration.

PROBLÊME LXXV.

183. Touver la surface de l'Eptagone irrégulier A B C D E F G, qui peut servir de modèle pour toutes les figures irrégulières, (*fig.* 24.)

RÉSOLUTION.

De l'angle A à l'angle E le plus éloigné, tracez la ligne A E ; sur cette ligne abbaissez les perpendi-

culaires G O, F R, D P, C S, B O; vous aurez quatre Triangles réctangles & trois Trapèses, dont les mesures réunies (n°. 166. & 180.) donneront celle de l'Eptagone irrégulier; ce qui est évident.

Ou, si vous l'aimez mieux, de l'angle C aux angles A, G, F, E, tirez les lignes C A, C G, CF, CE; ces lignes diviseront l'Eptagone en cinq Triangles que vous mesurerez séparément. Vous ferez une addition de la valeur de ces cinq Triangles; leur somme donnera l'aire de l'Eptagone proposé.

Cette dernière opération sera moins expéditive que la première; parce que dans le premier cas les bases de tous les Triangles & de tous les Trapèses se trouvent sur la même ligne A E, au lieu que dans la dernière figure toutes les bases pourront être différentes lignes : ce qui multipliera les embarras.

PROBLÊME LXXVI.

184. Trouver la surface d'une pièce de terre ABCD (*fig.* 25.) bornée par la Rivière R R, dont la rive n'est pas en ligne droite.

RÉSOLUTION.

Divisez la rive où aboutit la pièce de terre en plusieurs parties qui soient sensiblement droites, comme A O, O S, S M, &c. Des points C, B, imaginez les lignes C M, C N, C T, B O, B S, B M: ces lignes diviseront la pièce de terre en Triangles, qui différeront très-peu de Triangles réctilignes; mesurez donc ces Triangles à l'ordinaire, pour avoir dans leur somme la valeur du terrein A B C D.

PROBLÊME LXXVII.

185. Mesurer la surface d'un Poligone régulier ABCDEF, (*fig.* 26.) par exemple, d'un Sallon éxagone, ou de tout autre Poligone régulier.

RÉSOLUTION.

Elle eſt beaucoup plus facile que les précédentes. Du centre O abbaiſſez ſur un des côtés A B la perpendiculaire O S ; meſurez cette perpendiculaire, auſſi-bien que le côté A B, ſur lequel elle tombe ; multipliez O S par A B ; prenez la moitié de ce produit, que vous multiplierez encore par le nombre des côtés du Poligone, c'eſt-à-dire, ici par 6 : ce dernier produit ſera la valeur du Poligone propoſé.

DÉMONSTRATION.

Tirez les lignes O A, O B, O C, &c. il y aura autant de Triangles égaux que le Poligone a de côtés ; par conſéquent la ſurface de ce Poligone ſera égale à celle du Triangle A O B, pris autant de fois qu'il y a de côtés : or c'eſt ce que nous avons fait, en multipliant par 6 la moitié du produit de A B par O S, valeur du Triangle A O B, C. Q. F. D.

PROBLÊME LXXVIII.

Changer une figure, telle que le Triangle B A C (*fig.* 27.), en une autre figure qui ait un nombre quelconque de côtés, ſans avoir néanmoins plus de ſurface que le Triangle A B C.

RÉSOLUTION.

Afin de ſimplifier la réſolution de ce Problême, propoſons-nous ſeulement de changer le Triangle A B C en une figure qui ait un côté de plus, c'eſt-à-dire, en une figure de quatre côtés.

D'un angle A quelconque de ce Triangle, tirez au côté oppoſé B C une ligne quelconque A D. Par un des deux autres angles B, tirez une ligne indéfinie B S parallèle à la ligne A D ; & du point A ti-

rez une ligne A P, qui coupe la parallèle indéfinie B S en un point quelconque P. Enfin de ce point P, au point D tirez la ligne P D ; elle donnera une figure A C D P de quatre côtés, qui n'aura pas plus de ſurface que le Triangle A C B.

DÉMONSTRATION.

Il s'agit de prouver que la figure A C D P a préciſément la même ſurface que le Triangle A C B. Remarquez d'abord que ces deux figures ont une partie commune A C D O. Reſte donc à démontrer que l'autre partie A O P, eſt égale à l'autre partie B O D. Conſidérez donc les deux Triangles P A D, B A D, de même baſe A D, & qui ſont entre les mêmes parallèles B P, D A (par la conſtruction) : ces deux Triangles ont donc même baſe & même hauteur; ils ſont donc égaux en ſurface (n°. 172.); par conſéquent les deux parties de l'un priſes enſemble, ſont égales aux deux parties de l'autre auſſi priſes enſemble : mais ces deux Triangles ont de commun la partie D O A ; c'eſt donc une néceſſité que la ſeconde partie B O D ſoit égale à la ſeconde partie A O P, & par conſéquent que la figure A C D P de quatre côtés ſoit égale en ſurface au Triangle B A C, C. Q. F. D.

La conſtruction de ce Problême eſt d'autant plus facile, que l'on peut tirer à liberté les lignes A D, A P. Cependant, comme on préfère les terreins réguliers, ou approchans de la régularité à ceux qui ne le ſont pas, ſi l'on veut transformer le Triangle A B C en un parallélogramme, (*fig.* 28.) de l'angle A tirez A D ſur le milieu de B C ; & après avoir mené l'indéfinie B S parallèlement à A D, par le point A vous mènerez encore A P parallèle à B C. Tirez préſentement P D : vous aurez le parallélogramme C A P D égal en ſurface au Triangle B A C ; ce qui n'a pas beſoin de démonſtration.

On se servira du même artifice pour transformer le parallélogramme A C D P (*fig.* 29.) en une figure de cinq côtés de même surface que ce parallélogramme, c'est-à-dire, que d'un angle A quelconque de ce parallélogramme, on mènera A G en un point quelconque G, entre P & D; il faudra tirer ensuite l'indéfinie P S parallèlement à G A, & du point A mener une ligne quelconque A O, laquelle faisant un angle quelconque avec le côté C A, coupe l'indéfinie P S en un point O. De ce point si l'on tire O G, la figure C D G O A aura cinq côtés, & n'aura pas plus de surface que le parallélogramme A C D P. La Démonstration est la même que ci-dessus. En continuant ainsi de transformer une figure en une autre qui ait un côté de plus, on pourra toujours donner à une figure tel nombre de côtés que l'on voudra, sans changer en rien la valeur de sa surface : ainsi le Problême est résolu généralement.

Par une opération contraire, vous réduirez une figure d'un nombre quelconque de côtés, en une autre qui en ait deux, trois, quatre, &c. de moins, pourvû qu'il ne soit pas question de la réduire en une figure qui ait moins de trois côtés : car alors le Problême seroit impossible ; j'en proposerai seulement un exemple, ce Problême n'étant que le retour du précédent.

Soit donc la figure A B C D F (*fig.* 30.) de cinq côtés, qu'il s'agit de réduire en une figure qui n'en ait que trois, & qui ait pourtant la même surface que la figure de cinq.

Réduisons-la d'abord à quatre côtés. Pour cela tirons A D, & par le point F menons-lui la parallèle indéfinie F S ; prolongeonsle côté B A jusqu'à ce qu'il coupe la parallèle F S en un point O. De ce point tirons la ligne O D : je dis que la fi-

gure O D C B de quatre côtés, a la même surface que le pentagone irrégulier A B C D F A.

Car on voit, comme ci-dessus, que ces deux figures ont la partie commune C D L A B, & qu'à cause des Triangles AOD, AFD, de même base & de même hauteur, la partie L F D est égale à la partie L O A; ainsi la figure de quatre côtés a précisément la même surface que le pentagone irrégulier.

On réduira ensuite la figure de quatre côtés OBCD au Triangle SDC (*fig.* 31.) de même surface, comme on le voit par la construction de la figure; & par conséquent la figure A B C D F (*fig.* 30.) de cinq côtés, se trouvera réduite en une figure de trois (*fig.* 31.), qui aura précisément la même surface, C. Q. F. T. & D.

REMARQUE.

Tant que l'on peut se passer de contrats de vente, c'est toujours le mieux. On œconomise l'argent & le tems : c'est à quoi le Problême du n°. 185 peut être fort utile. Par son moyen on pourroit faire l'échange de Terreins voisins, sans être obligé de vendre ou d'acheter; dans le cas, par éxemple, où l'on voudroit donner à l'emplacement d'un Château ou d'un Jardin une autre figure plus régulière ou plus commode, que celle d'un Terrein proposé.

186. Dans toutes les opérations précédentes, nous avons supposé que l'on pouvoit parcourir l'intérieur du terrein, dont on proposoit de trouver la mesure: cependant il est un très-grand nombre de circonstances où cela n'est pas possible; un bassin rempli d'eau, une forêt, un lac, un marais impraticable, un terrein embarrassé ou trop couvert, ne permettent pas que l'on trace des lignes au-dedans de leur figure. Il faut les évaluer, si l'on peut, par la seule connoissance des côtés extérieurs qui les terminent:

pour cela il y a plusieurs moyens; nous allons exposer ceux qui sont les plus faciles à comprendre, comme les plus propres à entretenir dans les jeunes gens le goût de cultiver leur raison.

Supposons donc qu'il s'agisse de mesurer le Triangle A B C (*fig.* 19.) obtusangle, c'est-à-dire, dont un des angles B est obtus; qu'il ne soit pas possible de parcourir l'intérieur de ce Triangle, ni commode d'en prolonger les côtés A B, C B, afin d'abbaisser des perpendiculaires sur leur prolongement. On mesurera les trois côtés A B, B C, C A: mais cette connoissance ne suffit pas; il faudroit encore avoir la valeur d'une perpendiculaire. Imaginons la perpendiculaire B D que l'on ne sçauroit parcourir: si nous pouvions la déterminer par la simple connoissance des trois côtés de ce Triangle, on en trouveroit la surface à l'ordinaire.

On s'apperçoit que la perpendiculaire B D divise le triangle obtusangle A B C en deux triangles réctangles A D B, B D C; mais les Géomètres ont découvert une propriété du triangle réctangle, qui nous servira à trouver la véritable longueur de la perpendiculaire B D, quoiqu'il ne soit pas possible de lui appliquer aucune mesure. Cette propriété va être énoncée dans la Proposition suivante.

PROPOSITION XVIII. (*a*)

187. Soit le triangle A B C (*fig.* 32.) réctangle en B. On appelle *hypothénuse* le côté A C opposé

(*a*) On n'a mis ici cette Proposition, qu'en faveur de ceux qui n'auroient pas le dessein d'aller plus loin que les deux premiers Livres: car sa véritable place, par rapport à tout l'ouvrage, est d'être la vingt-septième dans l'ordre des Propositions, comme on le verra au Chapitre des lignes proportionnelles, n°. 293. où cette Proposition est démontrée beaucoup plus facilement; c'est pourquoi la Proposition qui suivra celle-ci, est véritablement la dix huitième: elle doit se déduire immédiatement de la dix-septième, & non pas de celle dont il est ici question.

à

à l'angle droit B. Sur cette hypothénuse faites le quarré A O S C. Faites aussi des quarrés sur les deux autres côtés A B, B C. On a trouvé que le quarré A O S C de l'hypothénuse, est égal à la somme des quarrés A B M G, B C D F, construits sur les deux autres côtés A B, B C.

DÉMONSTRATION.

De l'angle droit B, abbaissez sur l'hypothénuse A C la perpendiculaire B P R; elle divise le grand quarré en deux réctangles A O R P, P R S C. Si l'on démontre que le petit réctangle A O R P = le petit quarré A B M G, & que l'autre réctangle P R S C = l'autre quarré B C D F, on aura démontré que le grand quarré A O S C = les deux quarrés A B M G, B C D F.

Je dis donc premièrement, que le réctangle P R S C = le quarré B C D F. Tirez les lignes B S, A D, & remarquez que le triangle B C S a même base & même hauteur que le réctangle P R S C, puisqu'en prenant C S pour base de l'un & de l'autre poligone, ils ont même hauteur, étant posés entre les mêmes parallèles B R, C S. Ainsi le triangle B C S est la moitié du réctangle P R C S : car il a été démontré qu'un triangle est toujours la moitié d'un parallélogramme de même base & de même hauteur. Vous trouverez aussi que le triangle A D C est la moitié du quarré B C D F ; ces deux figures ont même base D C, & elles sont entre les mêmes parallèles D C, F B A. Par conséquent en démontrant que les deux triangles B C S, A D C sont égaux, c'est une nécessité que le réctangle P R S C & le quarré B C D F, qui sont chacun doubles de ces triangles, soient aussi égaux.

Mais (n°. 172.) des triangles qui ont des bases & des hauteurs égales, sont égaux en surface: or les

triangles A D C, B C S, ont des bases & des hauteurs égales; car le triangle A D C ayant D C pour base, aura pour hauteur B C = D C, à cause des parallèles D C, F A. De même le triangle B C S ayant pour base B C = D C, aura pour hauteur la perpendiculaire S M abbaissée sur le prolongement C M. Or S M = B C ou C D. Pour en être convaincu, comparez le triangle S C M avec le triangle A B C: vous verrez qu'ils ont tous leurs côtés égaux, chacun à chacun; car C S = A C, & en prolongeant le côté A C indéfiniment, on voit que l'angle O C M avec l'angle M C S vaut un angle droit: mais l'angle B C A avec l'angle B A C vaut aussi un angle droit; par conséquent O C M + M C S = B C A + B A C. Mais l'angle O C M = B C A son opposé par le sommet. Donc M C S = B A C; & comme les triangles C M S, A B C, sont tous deux réctangles (supp.), il est clair que le troisième angle M S C = le troisième angle B C A (n°. 78.) Les deux triangles C B A, C M S, ont donc un côté égal, & les angles sur ce côté égaux, chacun à chacun; par conséquent les côtés opposés à des angles égaux sont égaux (n°. 85.): ainsi S M = B C.

Les deux triangles A D C, B S C ont donc même base & même hauteur; il faut donc conclure qu'ils sont égaux en surface (n°. 172.), & par conséquent que le réctangle P R S C, & le quarré B C D F, qui sont chacun doubles de ces triangles égaux, ont aussi des surfaces égales, C. Q. F. D. (*a*)

(*a*) Il est à propos que je prévienne un reproche que l'on me fera infailliblement. Vous pouviez, me dira-t-on, démontrer d'une manière beaucoup plus simple que le triangle A D C = le triangle B C S: d'autres l'ont exécuté. Ils ont fait voir que le triangle A D C a les deux côtés D C, C A, égaux aux deux côtés B C, C S du triangle B C S, chacun à chacun, & l'angle compris entre ces côtés égal de part & d'autre, puisque l'angle D C A est composé d'un angle droit & de l'angle B C A, & que l'angle B C S est aussi composé d'un angle droit

Secondement, on prouvera de la même manière que le petit réctangle A P R O = le petit quarré A B M G (*fig.* 33.), en tirant les lignes C G, B O; car on trouvera facilement, comme ci-devant, que le triangle C A G = le triangle B O A: or le triangle C A G est la moitié du petit quarré A B M G situé sur la même base A G, & entre les mêmes parallèles A G, M C. Et le triangle B O A est aussi la moitié du réctangle A P R O de même base A O, & entre les mêmes parallèles A O, B R; par conséquent les moitiés étant égales, les tous seront égaux, c'est-à-dire, que le réctangle A P R O = le quarré A B M G, C. Q. F. D.

188. Sans changer rien à la longueur des côtés A B, B C, du triangle réctangle A B C, supposons que l'angle droit A B C s'ouvre, c'est-à-dire,

& de l'angle B C A. Or, quand deux triangles ont deux côtés égaux, chacun à chacun, & l'angle compris entre ces côtés égal de part & d'autre, il est visible que ces deux triangles sont égaux en surface; & pour démontrer cette égalité, on n'est point obligé d'avoir recours à la comparaison des deux triangles S C M, A B C, comme vous avez fait.

Si j'avois voulu être l'écho des échos qui ont écrit sur la Géométrie, faire un tas de Propositions, & non pas en construire un édifice, il n'est pas douteux que j'eusse évité ce reproche; mais il faut que je le répéte: en travaillant à la composition de l'Ouvrage que je donne au Public, entre plusieurs objets que je m'y suis proposés, celui de déduire une Proposition immédiatement de celle qui la précède, m'a paru mériter une attention particulière. Jusqu'ici personne n'a osé le tenter: on a crû même que l'éxécution n'en étoit pas possible; c'est néanmoins ce dont je suis venu à bout, & ce qui m'a imposé la nécessité de démontrer la Proposition présente par le moyen qui m'a occasionné cette Note. Autrement cette Proposition n'auroit pas été déduite immédiatement de la Proposition précédente.

Je conviens que ma Démonstration en devient un peu plus longue; mais un inconvénient aussi mince n'est pas capable de balancer les avantages que nous avons retirés de cette méthode. Elle présente à l'esprit une Généalogie non interrompue de Propositions fort simples & en assez petit nombre, avec lesquelles nous avons résolu tout ce que l'on peut tirer de plus intéressant de la Géométrie ordinaire; cela est d'un très-grand soulagement pour l'esprit, qui par la méthode ordinaire se trouve accablé d'une multitude de Propositions sans ordre, absolument inutiles au dessein unique que l'on devroit se proposer, d'exercer la raison des jeunes gens à des vérités réductibles à nos usages.

qu'il devienne obtus ; les points A , C , s'écarteront, leur distance deviendra plus grande, & par conséquent le quarré A C du côté opposé à l'angle obtus , sera plus grand que la somme des quarrés faits sur les deux autres côtés.

Et si l'angle droit A B C se ferme ou devient aigu , les points A , C, se rapprocheront, leur distance A C diminuera ; ainsi le quarré du côté A C opposé à l'angle aigu , sera plus petit que la somme des quarrés faits sur les deux autres côtés. (*a*)

189. D'où il suit, que la converse de la Proposition 18 (n°. 187.) est très-véritable ; c'est-à-dire, si un triangle est tel, que le quarré d'un de ses côtés soit égal à la somme des quarrés faits sur les deux autres côtés, ce triangle sera nécessairement réctangle : car s'il ne l'étoit pas, il ne pourroit avoir la propriété qu'on lui attribue (n°. 187.)

190. Puisque $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ (n°. 187.); donc $\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ ou $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$: c'est-à-dire, que si du quarré de l'hypothénuse l'on ôte un des quarrés faits sur les autres côtés, on aura le quarré de l'autre côté.

Supposons présentement $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$: on aura $\sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2} = AB$; ce qui signifie, que l'on trouvera la valeur d'un côté A B, en tirant la racine quarrée de la différence entre le quarré de l'hypothénuse & celui de l'autre côté.

191. Lorsque l'on connoît les trois côtés d'un triangle, on peut donc toujours se convaincre, s'il est Réctangle , Obtusangle ou Acutangle. Car ce

(*a*) On peut rendre cette Démonstration oculaire avec les jambes d'un compas. On disposera les jambes à angles droits : les ouvrant ensuite, ou les fermant, on verra leurs extrémités s'éloigner ou se rapprocher.

triangle sera équilatéral, isocèle ou scalène. Dans le premier cas, tous ses angles sont aigus. Dans le second & le troisième cas, examinez si le quarré du plus grand côté est égal à la somme des quarrés faits sur les deux autres côtés; si vous trouvez cette égalité, le triangle est réctangle. Le quarré du plus grand côté surpassant la somme des deux autres quarrés, le triangle est obtusangle; enfin c'est un triangle acutangle, lorsque le quarré du plus grand côté est plus petit que la somme des deux autres quarrés. (n°. 187.)

192. Cette observation peut avoir son utilité, lorsque l'on cherche à déterminer la surface d'un triangle dont on ne peut mesurer que les trois côtés; car si l'on trouve qu'il est réctangle, on multipliera les deux côtés qui comprennent l'angle droit, l'un par l'autre, & la moitié de ce produit donnera la surface du triangle proposé.

Supposons, par éxemple, que les côtés du triangle A B C (*fig.* 34.) ayant été mesurés, l'on ait trouvé A C = 10 toises, A B = 6, B C = 8. Quarrez tous ces côtés séparément. Le quarré de A C = 100; celui de B C = 64, & celui de A B = 36. Prenez la somme des deux petits quarrés 64 & 36 = 100, valeur du quarré du plus grand côté A C. Le triangle A B C est donc réctangle en B. Ainsi, en prenant B C pour base de ce triangle, A B en sera la hauteur. Multipliez donc B C par la moitié de A B, ou 8 par 3; le produit 24 toises quarrées est la valeur du triangle A B C.

Mais, si le plus grand côté A C ne contenoit que 9 toises, le quarré de 9 donnant 81, nombre plus petit que 100 qui est la somme des deux autres quarrés, l'angle B seroit aigu; & ce seroit un angle obtus, si A C valoit 11 toises, parce que le quarré de 11 = 121, nombre plus grand que 100, somme

des quarrés faits sur les deux autres côtés (n°. 187.)

PROBLÊME LXXVIII.

193. Trouver la surface d'un triangle isocèle ABC (*fig.* 35.) acutangle ou obtusangle, dont on ne connoît que les trois côtés. On sçait que A C = 4 perches; A B & B C en valent 3 chacun.

RÉSOLUTION.

Il est certain que, si l'on peut connoître la perpendiculaire B D abbaissée de l'angle B sur le côté A C, la surface de ce triangle sera trouvée. Remarquez donc que cette perpendiculaire doit nécessairement tomber sur le milieu de A C (n°. 19.) Ainsi A D = 2 toises, & le triangle B D A est réctangle. Par conséquent le quarré de A B ou $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$ (n°. 187.) Ainsi $\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 = \overline{BD}^2$: d'où l'on tire $BD = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$. La perpendiculaire B D est donc égale à la racine quarrée de 5 perches quarrées.

Pour avoir cette perpendiculaire très-approchée, réduisons les 5 perches quarrées en pouces quarrés; elles produiront 233280 pouces quarrés, dont la racine quarrée est 482 pouces courans à peu près, valeur de la perpendiculaire B D.

Multipliez donc la moitié de la base A C, c'est-à-dire, 2 perches ou 432 pouces, par la perpendiculaire B D = 482 pouces: le produit 208224 pouces quarrés exprimera la surface du triangle isocèle A B C; & réduisant ce nombre de pouces quarrés en de plus grandes mesures, on trouvera que la surface du triangle A B C = 4 perches, 4 toises, 6 pieds quarrés.

L'aire du triangle A B C se trouvera un peu plus grande, si l'on fait usage de l'approximation des racines, enseignée n°. 79. Algèb. Tom. I.; car, en se proposant d'avoir la racine quarrée de 5 perches quarrées plus approchée que de $\frac{1}{10000}$, on multipliera 5 par le quarré de 10000 = 100000000, & le divisant sur le champ par ce même quarré, le nombre 5 se trouvera transformé en la fraction $\frac{500000000}{100000000}$, dont il faudra extraire la racine quarrée, tant du numérateur que du dénominateur. Or celle du dénominateur = 10000 (supp.) il n'y a donc qu'à extraire celle du numérateur : on la trouvera = 22360, sous laquelle posant celle du dénominateur 10000, on verra que la racine quarrée de 5 = $\frac{22360}{10000} = \frac{2236}{1000}$, racine si approchée qu'il ne lui manque pas $\frac{1}{10000}$ de perche.

Présentement, il faut multiplier la moitié de la base A C ou 2 perches par la perpendiculaire BD = $\frac{2236}{1000}$; & l'on aura $\frac{4472}{1000}$ pour l'aire du triangle proposé : cela fait 4 perches quarrées + $\frac{472}{1000}$ de perche quarrée. On multipliera cette fraction par 9 (parce qu'une perche quarrée = 9 toises quarrées), & cela produira $\frac{4248}{1000}$ de toise quarrée = 4 toises quarrées + $\frac{248}{1000}$ de toise quarrée : en multipliant le numérateur de cette dernière fraction par 36, pour avoir des pieds quarrés, on la trouvera = $\frac{8928}{1000}$ de pied quarré; lesquelles = 8 pieds quarrés + $\frac{928}{1000}$ de pied quarré. Si l'on continue de multiplier le numérateur de cette fraction par 144, pour avoir des pouces quarrés, elle

deviendra $= \frac{133.632}{1000}$ de pouce quarré $=$ 133 pouces quarrés $+ \frac{632}{1000}$ de pouce quarré ; dont multipliant le numérateur par 144, pour avoir des lignes quarrées, on aura $\frac{91.008}{1000}$ de ligne quarrée $=$ 91 lignes quarrées $+ \frac{8}{1000}$ ou $\frac{1}{125}$ de ligne quarrée. Tellement que l'aire du triangle proposé $=$ 4 perches, 4 toises, 8 pieds, 133 pouces, 91 lignes $+ \frac{1}{125}$ de ligne quarrée ; & cette aire, qui devroit être la même que la précédente, est néanmoins plus grande, parce que la racine en est plus approchée.

On est entré dans tout le détail de ce calcul, afin que les commençans ayent des modèles sur lesquels ils puissent se régler.

PROBLÊME LXXIX.

194. Déterminer la surface du triangle scalène A B C (*fig.* 36.) obtusangle ou acutangle, par la seule connoissance de ses trois côtés, dont A C $=$ 5 toises : B C en vaut 4, & B A $=$ 2.

RÉSOLUTION.

Vous représenterez à peu près la figure de ce triangle sur un brouillon, où vous marquerez la valeur trouvée de chaque côté. Après cela vous abbaisserez une perpendiculaire B D sur le plus grand côté A C, afin que cette perpendiculaire tombe toujours en dedans du triangle. Il est question de connoître cette perpendiculaire.

Pour y parvenir avec plus de facilité, soient A C $= a$, B C $= b$, A B $= c$, A D $= x$ inconnue, parce que l'on ignore à quelle distance

du point A tombe la perpendiculaire BD ; ainsi DC (qui vaut AC − AD) sera $= a - x$. Appellons aussi la perpendiculaire inconnue $BD = y$; & remarquons que le triangle proposé se trouve résolu, par la perpendiculaire BD, en deux triangles réctangles BDA, BDC, dans lesquels les côtés BA & BC sont hypothénuses ; chacun dans leur triangle. On a par conséquent, en considérant d'abord le triangle réctangle ADB, $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$, c'est-à-dire, $c^2 = x^2 + y^2$. Passant ensuite au triangle réctangle BDC, on en tire $\overline{BC}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{BD}^2$, ou $b^2 = \overline{a - x} \times \overline{a - x} + y^2$; c'est-à-dire, (en faisant le calcul) que $b^2 = a^2 - 2ax + x^2 + y^2$. Si l'on substitue, dans cette dernière équation, c^2 en la place de $x^2 + y^2$, dont on a vû l'égalité, elle deviendra $b^2 = a^2 - 2ax + c^2$; donc, (en transposant) $2ax = a^2 + c^2 - b^2$, & divisant l'un & l'autre membre par $2a$, l'on trouve $x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$; ce qui donne (en substituant les nombres) $x = \frac{25 + 4 - 16}{10} = \frac{13}{10} = AD$.

Si l'on reprend l'équation $c^2 = x^2 + y^2$, & que l'on mette les nombres trouvés en la place des lettres, on aura $4 = \frac{169}{100} + y^2$; &, en transposant, on trouve $4 - \frac{169}{100} = y^2 = \frac{400}{100} - \frac{169}{100} = \frac{231}{100}$; donc (en extrayant la racine quarrée de part & d'autre) y ou $BD = \sqrt{\frac{231}{100}}$. Ce qui signifie que la perpendiculaire BD = la racine quarrée de 231 toises quarrées divisées par 100 ; & réduisant les 231 toises quarrées en pouces quarrés, vous trou-

verez B D = $\sqrt{\frac{1197104}{100}} = \frac{1094}{10}$ de pouces courans à peu près.

Dans le triangle A B C on connoît donc la base C A = 5 toises ou 3 6 0 pouces, & la perpendiculaire B D = $\frac{1094}{10}$ de pouces. Par conséquent on en aura la surface, en multipliant la moitié de la base = 1 8 0 par $\frac{1094}{10}$, qui est l'expression en pouces de la perpendiculaire B D : le produit sera 1 9 6 9 2 pouces quarrés, lesquels réduits en toises, valent 3 toises, 28 pieds, 108 pouces quarrés.

On trouvera que le calcul sera beaucoup plus simple, plus expéditif, & plus juste, en faisant usage de l'approximation des racines, dont on a vû l'art au chapitre de l'Algèbre. (n°. 79.) Sans réduire les $\frac{231}{100}$ de toise quarrée en pouces quarrés ou en lignes &c. si on en veut avoir la racine quarrée plus approchée que de $\frac{1}{10000}$, on observera d'abord que la racine quarrée du dénominateur 1 0 0 est 1 0, & qu'ainsi l'approximation ne peut regarder que le numérateur 2 3 1, qui n'est pas un nombre quarré. On le multipliera donc par le quarré de 1 0 0 0 0, comme on l'a enseigné à l'article de l'approximation des racines ; ce qui produira 2 3 1 0 0 0 0 0 0 0 0, & le divisant sur le champ par la même quantité qui l'a multiplié, le numérateur 2 3 1 se trouvera sous la forme de la fraction $\frac{2310000000}{100000000}$, dont on sçait que l'on a la racine quarrée, en extrayant celle du numérateur & celle du dénominateur : or celle du dénominateur est tirée, c'est 1 0 0 0 0 (supp.); il ne reste donc qu'à extraire, par la règle ordinaire, la racine quarrée du numérateur 2 3 1 0 0 0 0 0 0 0 0, que l'on trouvera = 1 5 1 9 8 6 ; & posant dessous celle de son dénominateur, on verra que la racine quarrée de 2 3 1 = $\frac{151986}{10000}$ de toise cou-

rante; racine si approchée qu'en l'augmentant seulement de $\frac{1}{10000}$, elle seroit trop grande: or $\frac{1}{10000}$ de toise est presque inassignable, cela n'excède guère un point, puisqu'on ne trouve que 10368 points dans la longueur d'une toise; par conséquent la précision rigoureuse, si elle étoit possible ici, produiroit à peine une différence discernable. Supposant donc que nous avons la racine éxacte du numérateur 231; on la divisera par 10, qui est celle de son dénominateur 100, & l'on verra que la perpendiculaire B D, que l'on a trouvée $= \sqrt{\frac{231}{100}}$, vaut aussi $\frac{151986}{100000}$ de toise courante.

Pour avoir la valeur du triangle ABC, on multipliera donc sa base C A = 5 toises par la moitié de cette perpendiculaire B D; cela produira $\frac{3.79965}{100000}$ de toise quarrée, lesquelles valent 3 toises quarrées + $\frac{79965}{100000}$. On sçait qu'une toise quarrée = 36 pieds quarrés; en multipliant donc le numérateur 79965 de la fraction précédente par 36, on aura $\frac{28.78740}{100000}$ de pied quarré, qui valent 28 pieds quarrés + $\frac{78740}{100000}$ de pied quarré, laquelle fraction multipliée par 144 (parce qu'un pied quarré = 144 pouces quarrés) produira $\frac{113.38560}{100000}$ de pouce quarré: c'est 113 pouces quarrés + $\frac{38560}{100000}$ de pouce quarré. Si on multiplie encore cette dernière fraction par 144, elle donnera $\frac{55.52640}{100000}$ de ligne quarrée, lesquelles valent 55 lignes quarrées + $\frac{52640}{100000}$: laquelle fraction, réduite à sa plus simple expression = $\frac{329}{625}$ de ligne quarrée; de sorte que l'aire

du triangle ABC = 3 toises, 28 pieds, 113 pouces, 55 lignes quarrées + $\frac{329}{625}$ de ligne quarrée. (*a*)

Il ne faut pas être surpris que cette aire se trouve plus grande que celle de la méthode précédente, qui n'a donné que 3 toises, 28 pieds, & 108 pouces quarrés, quoiqu'elle dût être la même. C'est que dans l'extraction des racines, on néglige beaucoup moins en approchant par des dix milliêmes de toises que par des pouces.

Comme ces Institutions peuvent être utiles à ceux qui ont déja quelque connoissance en Géométrie, nous avons choisi ce dernier cas qui n'est pas des plus simples, afin qu'ils apprennent à se démêler des calculs un peu compliqués. Cependant nous allons résumer dans une règle générale tous les procédés que nous avons tenus.

(*a*) Je conseille fort que l'on n'emploie jamais d'autre méthode d'approximation que cette dernière : elle paroît longue dans l'explication, parce qu'il faut tout dire aux commençans; mais elle est fort courte dans la pratique. Ses avantages ont été exposés à la fin du n°. 79. de l'Algèb. Tom. I. On peut le relire : on y verra qu'on peut se dispenser d'écrire plus d'une fois le dénominateur 100000, que l'on a répété ici autant de fois que doit le supposer une personne instruite, mais dont la suppression auroit peut-être embarrassé celles qui ne le sont pas ou qui ne le sont pas assez. C'est dans ce même esprit, que je leur dirai encore, que le point mis dans quelques-unes des fractions supérieures, en distingue les entiers, qui sont à la gauche, des parties fractionnées qui sont à la droite; ce qui procure une commodité dans la division, laquelle n'est point du tout à négliger; puisque ce point seul, placé convenablement, donne tout-à-coup & les entiers & la fraction de la division qui se présente, ainsi qu'il est expliqué au même n°. 79. de l'Alg. Tom. I.

RÉGLE GÉNÉRALE

Pour le calcul des triangles ſcalènes, acutangles ou obtuſangles, dont on cherche la ſurface, lorſque l'on n'en connoît que les trois côtés.

195. Prenez l'équation $DC = \frac{\overline{CA}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2}{2CA}$, qui eſt l'expreſſion du plus grand ſegment; cette équation vous montre qu'afin d'avoir la valeur du grand ſegment DC, il faut retrancher le quarré du plus petit côté AB, de la ſomme des quarrés des deux plus grands côtés CA, BC, & diviſer ce reſte par le double du plus grand côté CA.

La valeur de DC une fois connue, la perpendiculaire BD eſt aiſée à connoître : car on ſçait (n°. 187.) que $\overline{BC}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{BD}^2$. D'où l'on tire $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{DC}^2$, ou $BD = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{DC}^2}$. C'eſt-à-dire, que la perpendiculaire DB ſe détermine, en tirant la racine quarrée de la différence qu'il y a entre le quarré de BC, & le quarré du grand ſegment DC (*a*).

(*a*) La Démonſtration de la Propoſition dix-huit, & la Réſolution des Problêmes ſoixante-dix-huit & ſoixante-dix-neuf, pourroient embarraſſer un peu les jeunes gens, à cauſe que le détail en eſt aſſez long; mais avant qu'ils y arrivent, ils auront déja acquis quelque habitude à l'application. A propos de cela j'avertirai que l'on ne ſçauroit trop exercer les Commençans au calcul; la Géométrie en fait un uſage ſi continuel, qu'il n'eſt pas poſſible de faire quelques progrès dans cette ſcience ſans ſon ſecours : ſurtout lorſqu'on le met ſous la forme d'une équation, comme je l'ai dit ailleurs.

PROBLÊME LXXX.

196. Déterminer la longueur que l'on doit donner aux échelles, afin qu'elles soient proportionnées aux murailles que l'on se propose d'escalader. (*fig.* 37.)

RÉSOLUTION.

Supposons que la hauteur de la muraille soit représentée par la ligne AB = 6 toises, & que BC = 2 toises soit la distance du pied de l'échelle à la muraille : (on pose les échelles en taluant, de peur qu'elles ne se renversent.)

L'échelle AC représente alors l'hypothénuse d'un triangle réctangle, dont on connoît les deux côtés AB, BC. Or le quarré de l'hypothénuse AC vaut la somme des quarrés faits sur les deux autres côtés AB, BC (n°. 187.) On aura donc $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 36 + 4 = 40$ toises quarrées; ainsi $AC = \sqrt{40}$. Réduisez donc les 40 toises quarrées en pouces ou même en lignes quarrées ; cette réduction produira 29859840 lignes quarrées, dont la racine quarrée est 5464 lignes courantes = 6 toises, 1 pied, 11 pouces, 4 lignes, valeur de l'hypothénuse AC si approchée, qu'il ne lui manque pas la longueur d'une ligne.

PROBLÊME LXXXI.

197. Trouver la surface du terrein irrégulier ABCDE, dont on ne peut connoître que le circuit ou le contour. (*fig.* 38.)

PREMIER MOYEN.

Renfermez cette figure dans un réctangle O S P L, en abbaiſſant des angles E, C, les plus ſaillans, les perpendiculaires E O, C S, ſur le côté A B prolongé de part & d'autre autant qu'il en ſera beſoin; & prolongeant ces perpendiculaires jusqu'aux points L, P, tels que de l'angle D on puiſſe abbaiſſer une troiſième perpendiculaire L D P ſur les deux premières, on meſurera le réctangle O S P L, & les quatre triangles réctangles E O A, C B S, C D P, D E L, dont on ſera une ſomme; on retranchera la ſomme de ces triangles de la ſurface du réctangle O S P L: il eſt évident que le reſte donnera la ſurface de la figure irrégulière A B C D E.

Remarquez que par ce moyen il n'eſt pas beſoin de connoître les angles, ni même les côtés qui terminent la pièce de terre A B C D E; mais, comme il n'eſt pas toujours poſſible de s'étendre autour du terrein que l'on veut meſurer, il eſt quelquefois néceſſaire de connoître la longueur de ſes côtés, & la grandeur de ſes angles.

SECOND MOYEN.

198. Meſurez les côtés & les angles du terrein A B C D E (*fig.* 39.). Écrivez toutes ces meſures, ou plutôt faites un brouillon qui repréſente à peu-près les côtés & les angles du terrein propoſé, comme vous le voyez dans la figure 39, où l'on a écrit le long de chaque côté en dehors le nombre de toiſes qu'il contient, & en dedans les dégrés de chaque angle.

Vous choiſirez enſuite un terrein dans la campagne, où vous puiſſiez faire une figure 40 tout-

à-fait égale à la figure 39 : c'est-à-dire, que vous ferez MN = AB = 4 toises; l'angle N = A; le côté NO = AE = 5 toises; l'angle O = E; le côté OP = DE = 2 toises; l'angle P = D; le côté PT = DC = 6 toises; l'angle T = C; ce qui donnera l'angle M égal à l'angle B : ainsi la figure MNOPT sera égale en tout au terrein ABCDE, puisque tous les cotés & tous les angles de l'un sont égaux à tous les côtés & à tous les angles de l'autre, chacun à chacun; par conséquent, en mesurant le terrein MNOPT, en dedans duquel il est libre d'opérer (Probl. 75. n°. 182.) on aura la mesure du terrein ABCDE, dont l'intérieur n'est pas accessible.

Le Problême 79. (n°. 194.), que nous avons résolu par la propriété du triangle réctangle, pourroit tirer sa résolution du moyen que nous venons d'exposer; mais la voie seroit plus longue.

TROISIÉME MOYEN.

199. On lévera le plan du terrein ABCDE (*fig.* 39.), c'est-à-dire, que l'on fera en petit une figure *abcde* (*fig.* 41.) semblable à la grande figure que l'on se propose de mesurer. Or voici comment cela s'éxécute. Vous tracerez au bas d'un carton bien uni une ligne MN, que vous diviserez en autant de parties égales que vous en aurez besoin (n°. 63.); par éxemple, en 15: cette ligne ainsi divisée s'appelle une *échelle*. Vous allez en voir l'usage.

Tirez sur votre papier une ligne *ab* (*fig.* 41.) qui contienne quatre parties égales de l'échelle, pour représenter AB = 4 toises. Faites l'angle *bae* = l'angle BAE pris sur le terrein: (car je suppose que l'on a mesuré les côtés & les angles de terrein ABCDE), & portez cinq parties

de

de votre échelle depuis *a* jusqu'en *e*; le petit côté *a e* repréſentera le grand côté A E = 5 toiſes. Faites enſuite au point *e* l'angle *a e d* égal à l'angle A E D; prenez deux parties de votre échelle, portez-les de *e* en *d* : la ligne *e a* repreſentera E D = 2 toiſes. Continuez à faire au point *d* un angle *e d c* = l'angle E D C du terrein, & donnez ſix parties de votre échelle au petit-côté *d c*, pour repréſenter les ſix toiſes du grand côté D C, & tirez *c b* qui ferme la figure *a b c d e* : elle ſera en petit ce que la figure A B C D E eſt en grand; la grande figure pourra donc être connue par la petite : c'eſt pourquoi ſi de l'angle *a* on tire les lignes *a d*, *a c*, elles diviſeront la petite figure en trois triangles, dont on cherchera l'aire ſéparément, en abbaiſſant les perpendiculaires *e r*, *a s*, *b x*, ſur les baſes de ces triangles. On portera ces baſes & ces perpendiculaires ſur l'échelle M N, pour voir combien elles en contiennent de parties. On évaluera ces triangles à l'ordinaire, & leur ſomme repréſentera la ſurface du terrein A B C D E.

DÉMONSTRATION.

Puiſque chaque partie de l'échelle M N eſt priſe pour une toiſe, le quarré de cette partie repréſentera une toiſe quarrée; mais (*conſt.*) les lignes de la petite figure contiennent autant de parties de l'échelle, que les lignes correſpondantes de la grande contiennent de toiſes. Il y aura donc autant de toiſes quarrées dans le contenu du terrein A B C D E, qu'il y a de petits quarrés dans la ſurface du petit plan *a b c d e*; & par conſéquent ce petit plan eſt fort propre à faire connoître la ſurface du terrein dont il eſt le modèle (*a*).

(*a*) Cette Démonſtration eſt plutôt une Démonſtration de ſentiment qu'une Démonſtration en forme. J'en conviens : cependant il m'a

La multitude d'opérations que l'on est obligé de faire en prenant la longueur des côtés & la grandeur des angles d'un terrein dont on veut avoir le plan, expose à beaucoup d'erreurs ; on en diminueroit le nombre, si l'on pouvoit se passer de connoître la valeur des angles.

QUATRIÉME MOYEN

D'évaluer la surface d'un terrein inaccessible en dedans, sans qu'il soit nécessaire de connoître les angles qui la terminent.

Quand cette figure est un triangle, c'est la chose du monde la plus aisée. Mesurez les trois côtés AB, BC, CA, qui enveloppent votre terrein (*fig.* 42.) Pour le rapporter sur le papier, ayez recours à l'échelle MN. Prenez donc sur cette échelle six parties, que vous donnerez à la petite ligne *a b* (*fig.* 43.) qui représentera ainsi les six perches du côté A B. De l'extrémité *a*, avec sept parties de l'échelle, décrivez un arc ; & de l'extrémité *b* avec quatre parties de l'échelle décrivez un autre arc qui coupe le premier en *c* : il est évident que le petit triangle *a b c* sera un modèle parfait du grand triangle A B C. Car si le grand côté A C = 7 perches, le petit côté *a c* contient aussi sept parties égales ; & les quatre parties du petit côté *b c* ré-

E

paru qu'on n'en devoit pas absolument condamner l'usage, surtout à l'égard des vérités que l'on sçait être démontrées par d'autres voies plus rigoureuses ; cette méthode soutient & anime le goût des Commençans, qui ont une prodigieuse envie d'aller en avant : d'ailleurs, si l'on considère bien cette manière, elle est plus de génie que de calcul ; elle est par conséquent moins fatigante, ce qui mérite quelques égards.

Ceux qui ne se contenteront pas de ce que nous disons ici, n'auront qu'à consulter le Chapitre des lignes proportionnelles ; ils y seront pleinement satisfaits. Notre dessein a été de faire voir qu'indépendamment de la rigueur géométrique, l'on pouvoit faire concevoir la manière de lever les plans, & d'en déterminer l'aire ou la surface.

pondent aux quatre perches du grand côté B C ; par conséquent en mesurant la surface du petit triangle *a b c*, on aura celle du grand triangle A B C (n°. 197.)

Si le terrein proposé n'a pas une figure triangulaire, comme la figure 44, on pourra néanmoins le représenter sur le papier avec la même précision que nous y avons représenté le triangle, sans avoir égard à la grandeur de ses angles.

On en toisera d'abord les côtés, ausquels je suppose les dimensions marquées sur la figure 44 ; & pour en avoir les angles sans les prendre avec un instrument, par exemple, pour déterminer l'angle A B C, on prolongera le côté A B autant qu'il en sera besoin, jusqu'en M, & l'on pourra prendre sur le côté B C la partie B T = B M = 4 toises ; on toisera aussi M T = 7 toises.

Toutes ces dimensions étant écrites, on se disposera à représenter sur le papier le terrein ABCD, en faisant usage de l'échelle M N. Ainsi on tracera la ligne *a b* (*fig.* 45), à laquelle on donnera dix parties de l'échelle, afin de représenter les dix toises du côté A B ; & faisant le prolongement *b m* = 4 parties de l'échelle, pour répondre aux quatre toises du grand prolongement B M, on construira, comme ci-dessus, le petit triangle *b m t*, dont les côtés auront entr'eux les mêmes dimensions que ceux du grand triangle B M T, c'est-à-dire, que *m t* aura sept parties de l'échelle, & *b t* en aura quatre ; ce qui donnera l'angle *a b c* = l'angle A B C. Après quoi on fera *b c* = 8 parties de l'échelle : cette ligne représentera les huit toises du côté B C. Enfin l'on déterminera l'angle B C D par le même moyen qui vient de nous donner la grandeur de l'angle A B C, & ainsi des autres ; la figure 45 représentera donc en petit la longueur

des côtés & la grandeur des angles du terrein A B C D; par conséquent la mesure de la petite figure 45 fera connoître la surface du terrein A B C D (n°. 197.)

PROBLÊME LXXXII.

1200. Lever le plan d'un terrein A B C D E, dont on peut parcourir l'intérieur, (*fig.* 46.)

RÉSOLUTION.

Mesurez le contour du terrein A B C D E, & les lignes E B, E C, qui le partagent en triangles, dont chaque côté contient le nombre de perches marqué sur la figure; il n'est pas besoin d'en mesurer les angles. Servez-vous donc d'une échelle M N, qui contienne au moins autant de parties égales, que le plus grand côté B C = 5 contient de perches.

Il faut à présent procéder à construire une petite figure *a b c d e* (*fig.* 47.) qui représente en petit tout ce que le terrein A B C D E possède en grand. Tracez *a e* sur un carton bien uni, à laquelle vous donnerez trois parties de l'échelle, pour répondre aux trois perches du grand côté A E; des points *a*, *e*, avec deux parties de l'échelle, décrivez deux arcs qui se coupent au point *b*; tirez la ligne *a b*, & ponctuez *e b* ligne de construction: les deux petites lignes *a b*, *b e* représentent les deux grand côtés A B, B E, qui ont chacun deux perches; ensorte que le petit triangle *b a e* contient dans sa petite étendue tout ce qui est en grand dans le triangle B A E: réduisons donc, en suivant la même méthode, le triangle B E C au petit triangle *b e c*, en prenant cinq parties de l'échelle, avec lesquelles du point *b* nous décrirons un arc; après

quoi avec quatre parties de la même échelle, du point *e* nous en tracerons un autre qui coupera le premier en un point *c*, où tirant *b c*, on ponctuera *c e*. Pour achever la figure *a b c d e*, qui est un modèle parfait du terrein A B C D E, du point *c*, avec deux parties de l'échelle, vous décrirez un arc qui se trouvera coupé au point *d* par un autre arc décrit du point *e* avec trois parties de l'échelle: vous tracerez *e d*, *c d*, & vous aurez un plan très-éxact du terrein A B C D E; puisque les dimensions de la petite figure *a b c d e* sont éxactement correspondantes aux dimensions du terrein A B C D E.

PROBLÊME LXXXIII.

201. *Trouver la surface d'un poligone régulier A B D E F G H L, par exemple, d'un bassin octogone rempli d'eau, sans entrer en dedans de ce poligone, (fig. 48.)*

RÉSOLUTION.

Il est clair que le Problême se réduit à trouver la surface du triangle A C B; puisque ce poligone étant composé de 8 triangles égaux, en multipliant par huit la surface de l'un de ces triangles, le produit donnera la surface totale de ce poligone.

Rappellez-vous que le côté A B d'un poligone régulier est coupé en deux parties égales par la perpendiculaire C O abbaissée du centre C (nº. 122.) que l'angle A B D d'un tel poligone est aussi coupé en deux parties égales par une ligne C B tirée du centre au sommet de cet angle; & que l'on détermine la valeur de cet angle, en retranchant l'angle A C B au centre de 180 dégrés (nº. 121.) Or l'angle au centre de l'octogone

régulier = 45 dégrés, huitième partie de 360. Retranchant donc 45 de 180, on a 135 pour l'angle A B D de l'octogone, dont la moitié = 67 $\frac{1}{2}$ est la valeur de l'angle C B O. On peut mesurer B O, moitié du côté B A.

Cela supposé, construisez sur un terrein le plus uni que vous pourrez trouver, un triangle R P S (*fig.* 49.) égal au triangle C B O, en faisant R P = O B; l'angle S R P égal à l'angle droit C O B, & l'angle S P R = 67 dégrés $\frac{1}{2}$ = l'angle C B O: le point S, où les deux lignes R S, P S se rencontreront, déterminera le triangle R S P entièrement égal au triangle C B O (n°. 85.); mesurez donc le triangle S R P, c'est-à-dire, multipliez la base R P par la perpendiculaire S R, vous aurez un produit double du triangle S R P, ou de C B O = S R P: or le triangle A C B est double du triangle C B O; le produit de R P par R S exprimera donc la valeur du triangle A C B, & ce produit multiplié par 8 donnera la surface totale de l'octogone régulier.

En levant le plan de ce poligone, on pourroit encore en trouver l'aire ou la surface, ainsi que nous l'avons enseigné (n°. 197.)

Les bassins sont quelquefois d'une figure circulaire. La base ou le plan sur lequel pose une colonne est un cercle; il faut donc sçavoir trouver l'aire d'un cercle, afin qu'il n'y ait aucun cas qui puisse arrêter.

PROBLÊME LXXXIV.

202. Trouver la surface d'un cercle, au dedans duquel il est libre de s'étendre, (*fig.* 50.)

RÉSOLUTION.

On plantera des piquets fort proches les uns des

autres sur la circonférence du terrein circulaire. On y appliquera une mesure pliante, une chaîne ou un cordeau, autant de fois qu'il en sera besoin; on mesurera aussi le rayon C S; on multipliera les toises que contient la circonférence par les toises du rayon: la moitié de ce produit donnera la surface du cercle.

Il s'agit de prouver que l'aire du cercle est égale à la moitié du produit de la circonférence S S par le rayon O S.

Tirez tout autour du centre O les rayons O S fort près les uns des autres, (*fig.* 5 L) afin que la surface circulaire soit divisée en un très-grand nombre de petits Triangles S O S, qui ont pour hauteur le rayon O S, & pour base les petits arcs S S, qui ne s'écartent pas sensiblement de la ligne droite, à cause de l'énorme petitesse dont on peut prendre ces arcs; mais pour évaluer chaque petit triangle S O S, on prendroit la moitié du produit de la base S S par le rayon O S; par conséquent afin d'avoir la surface de tous ces triangles, on prendroit tous les arcs S S S, c'est-à-dire, toute la circonférence, que l'on multiplieroit par le rayon, pour avoir dans la moitié de ce produit la surface de tous ces triangles réunis, ou ce qui est la même chose, l'aire du cercle entier, qui est composé de ces triangles, C. Q. F. D. (*a*)

Si l'on ne peut pas s'étendre sur la surface du cercle, que l'on soit obligé de trouver l'aire d'un bassin circulaire plein d'eau, on aura recours à un moyen très-élégant, dont les Géomètres sont rede-

(*a*) Nous avouons que cette Démonstration pourroit être plus éxacte. Mais il ne nous a pas paru possible de la rendre telle pour des enfans à qui ce premier Livre est principalement destiné. Quand on aura vû ce que nous dirons dans la suite de la méthode d'exhaustion, il sera facile de l'appliquer à cette Démonstration pour la rendre rigoureuse.

vables au célèbre Archimède si profond dans les Mathématiques. Ce rare génie, qui a découvert tout ce qu'il y a de plus difficile dans la Géométrie utile, a trouvé qu'un cercle ayant sept pieds de diamètre, avoit à peu-près vingt-deux pieds de circonférence. Nous ne sçaurions faire entrer les Commençans dans les recherches qui ont conduit cet homme extraordinaire à cette découverte; qu'il leur suffise d'en apprendre l'usage, jusqu'à ce qu'ils ayent la force d'en connoître l'esprit.

PROBLÊME LXXXV.

203. Trouver la surface d'un cercle, dont on sçait que la circonférence contient dix pieds, (*fig.* 50.)

RÉSOLUTION.

On a besoin du rayon, ou de la moitié du diamètre S D : supposant la découverte d'Archimède, nous ferons cette règle de trois : 22 *est à* 7, *comme* 10 *est à* S D diamètre cherché ; d'où l'on déduit S D $= \frac{70}{22}$ de pieds, dont la moitié $= \frac{35}{22}$ $=$ C S, rayon dont on cherchoit la valeur : multiplions donc 5 pieds, moitié de la circonférence, par $\frac{35}{22}$ de pied valeur du rayon ; le produit $\frac{175}{22}$ de pied quarré exprime l'aire du cercle dont la circonférence $=$ 10 pieds ; & si l'on achève ce calcul, on trouvera que $\frac{175}{22}$ de pied quarré $=$ 7 pieds, 137 pouces, 65 $+ \frac{5}{11}$ de ligne quarrée.

Par le diamètre connu on pourroit aussi déterminer la circonférence, comme vous allez voir.

PROBLÊME LXXXVI.

204. Évaluer la surface d'un cercle dont le diamètre S D $= \frac{35}{11}$ de pied, (*fig.* 50.)

RÉSOLUTION.

Faites cette règle de trois : 7 est à 22, comme $\frac{35}{11}$ est à la circonférence que l'on cherche = 10 pieds : car multipliant $\frac{35}{11}$ par 22 = $\frac{770}{11}$; & divisant ce produit par 7, on trouve 10 pour la circonférence. Le diamètre & la circonférence d'un cercle étant connus, sa surface est aisée à connoître, (n°. 202.)

REMARQUE.

Lorsqu'on cherche la circonférence, on observera que la règle de trois doit commencer par 7 : si c'est le diamètre elle commencera par 22.

PROBLÊME LXXXVII.

205. Trouver la surface d'un *Secteur* de cercle BAC, (*fig.* 52.)

RÉSOLUTION.

Un *Secteur* de cercle est la portion d'une surface circulaire renfermée entre deux rayons AB, AC, & l'arc BC qui la termine. Vous trouverez l'aire de ce secteur, en enveloppant l'arc BC d'une mesure pliante qui indiquera les toises, les pieds, &c. contenus dans cet arc ; on toisera aussi le rayon ; on multipliera le rayon par l'arc, & la moitié du produit déterminera l'aire du secteur BAC. Cela est clair par la Démonstration du n°. 202.

Si vous ne pouvez connoître que l'arc BC de ce secteur sans pouvoir mesurer son rayon, employez le moyen suivant, qui est totalement indépendant de la découverte d'Archimède.

PROBLÊME LXXXVIII.

206. Moyen méchanique & Géométrique de trouver le rayon d'un cercle ou d'un secteur, en supposant simplement que l'on puisse appliquer quelque mesure sur une portion de la circonférence ou du secteur, (*fig.* 53.)

EXPOSITION DE CE MOYEN.

Prenez une lame fléxible (*a*), dont la matière retienne facilement la forme que l'on a dessein de lui faire prendre, par éxemple, une lame de plomb ou de cire qui soit de bonne consistance : appliquez cette lame sur la portion de circonférence B C, afin qu'elle prenne la forme circulaire de cet arc; enlevez cette lame ainsi conformée : placez-la sur un terrein libre & bien uni, où vous tracerez un sillon le long de son contour B O C. Ce sillon représentera une portion de circonférence égale à l'arc B C. Cherchez le centre de cet arc (nº. 130.); vous aurez le rayon A B, avec lequel vous décrirez une circonférence entière que vous mesurerez, ainsi que nous l'avons enseigné : la circonférence & le rayon connus, il ne s'agit plus que de calculer pour avoir la surface du cercle ou du secteur; ce qui est fort aisé, (nº. 202. & 205.)

Si l'on ne connoît que le rayon ou le diamètre du cercle que l'on veut mesurer, avec ce rayon ou ce demi-diamètre connu, on tracera une circonférence sur un terrein qui permette que l'on applique une mesure à cette circonférence; on en aura par ce moyen la longueur en toises, pieds,

(*a*) Il ne seroit pas absolument nécessaire d'avoir une lame; il suffiroit d'avoir la disposition de trois points, parce qu'en imaginant une circonférence par ces trois points, on en trouveroit facilement le centre, & par conséquent le rayon.

&c. & par conséquent l'aire du cercle proposé.

Quoique l'on puisse évaluer la surface d'un secteur par la mesure de l'arc qui le termine, parce que l'arc fait connoître le rayon ; la seule connoissance du rayon ne pourroit pas servir réciproquement à déterminer l'aire d'un secteur, puisque le même rayon peut convenir à une infinité de secteurs.

PROBLÊME LXXXIX.

207. Trouver la surface d'un *segment* de cercle B C A B. On appelle *segment* une portion de cercle renfermée entre une corde B C, & l'arc B A C soutenu par cette corde, (*fig.* 54.)

RÉSOLUTION.

On suppose d'abord que l'on puisse opérer au dedans de la figure. Cherchez le centre O du cercle auquel ce segment appartient (n°. 130.); vous aurez le secteur B O C A B, dont le segment proposé fait partie. Déterminez l'aire de ce secteur (n°. 205.) & celle du triangle B O C (n°. 176.); ôtez le triangle du secteur : le reste sera la valeur du segment B C A B. Cela n'a pas besoin de démonstration.

Pour connoître la surface de ce segment, quand on ne pourra mesurer que l'arc B A C qui le termine, on se servira du moyen que nous avons indiqué, (n°. 206.)

OBSERVATION SUR LA MESURE des Surfaces.

208. Il faut prévenir une objection qui est toute naturelle. Nous avons mesuré les surfaces, comme si c'étoient des plans parfaits ; cependant la plûpart des terreins sont rompus, inégaux, raboteux ; on y trouve des creux, des côteaux, des

monticules, des monts. Un dôme, une demi-sphère ont très-certainement plus de surface que la terre platte ou la base plane, sur laquelle ils s'appuyent : l'art de l'Arpentage donne par conséquent aux terreins beaucoup moins de surface qu'ils n'en possèdent ; n'est-ce pas une injustice, & ne fait-on pas un tort réel aux Propriétaires ?

Il y a des cas où ces inégalités doivent être considérées, & d'autres où l'on ne doit y avoir aucun égard. Une Ville située sur une colline, dont elle occuperoit toute la pente ou simplement une partie, auroit besoin d'un plus grand nombre de pierres pour être pavée, que si elle étoit assise sur le plan horisontal qui lui sert de base, parce que l'on fait suivre au pavé la disposition du terrein : on toiseroit en ce cas la surface courbe de la colline ; mais si l'on considéroit cette Ville par rapport aux maisons, aux édifices, aux jardins, aux vergers, aux plantations qu'elle renferme, ou que l'on peut y construire, sa mesure devroit s'estimer par celle de sa base horisontale, quand même cette base auroit une étendue incomparablement plus petite que la surface convèxe de la colline.

La raison en est que les édifices, les arbres, les plantes s'élèvent sur leur terrein perpendiculairement à l'horison (*a*) : on doit donc évaluer alors la

(*a*) Polybe a fait cette observation : c'est au Chapitre 4 du Livre 9. qui se trouve dans le sixième Tome de son Histoire, traduite par Dom Thuillier, & commentée par M. le Chevalier Folard. Il s'agit dans ce Chapitre des connoissances nécessaires à un Général d'Armée. *Entre plusieurs de ces connoissances*, que Polybe détaille, *dont les unes se peuvent acquérir par l'usage, par l'expérience, par l'Histoire, il en est quelques autres, où l'on a besoin d'étude & d'observations, comme par exemple, celles qui se tirent de l'Astronomie & de la Géométrie. Ce n'est pas qu'il importe beaucoup de posséder en entier l'objet de ces deux sciences ; mais il est très-important d'en sçavoir faire quelqu'usage ; ce qu'elles apprennent de plus nécessaire, c'est la durée des jours & des nuits : car il n'y a pas seulement de la différence entre la longueur du jour & celle de la nuit ; il y en a encore entre un jour & un jour, entre une nuit & une autre nuit ; il faut nécessairement sçavoir ce qui les fait croître &*

surface de la colline sur l'étendue que les édifices, ou les plantes peuvent occuper verticalement. Or,

diminuer. Sans la connoissance de ces changemens, quel moyen de prendre de justes mesures pour une marche de nuit ou de jour? Comment arriver à tems où l'on se propose d'aller? On arrivera trop tôt ou trop tard. Polybe indique le moyen de s'en instruire; il fait voir les fautes où sont tombés plusieurs Généraux qui les ignoroient. J'ajouterai aux connoissances tirées de l'Astronomie, celles que l'on tire des différens signes qui paroissent en l'air: il n'y a presque point de changement de tems un peu remarquable qui n'ait quelque signe précurseur. On doit s'y rendre attentif. Cela peut être utile en bien des rencontres; une pluie, un orage, un vent imprévû peut déranger extrêmement l'ordre ou l'éxécution d'un projet, tandis que cette disposition de tems accommodera fort les affaires de celui qui l'aura pressentie.

Tout le monde connoît la nécessité de la Géométrie pour la fortification, pour sçavoir lever un plan avec quelque intelligence; mais cette science *est encore indispensable pour changer selon les occurences la figure du Camp. Par ce moyen on pourra, en prenant quelque figure que ce soit, garder la même proportion entre le Camp, & ce qui doit y être contenu: ou, en gardant la même figure, augmenter ou diminuer l'aire du Camp, eu égard toujours à ceux qui y entrent ou qui en sortent, comme nous avons fait voir dans notre Traité des ordres de Batailles: & je ne crois pas* (ajoute ce grand Historien) *qu'on me sçache mauvais gré de demander à un Général quelque connoissance de l'Astronomie & de la Géométrie; ajouter des connoissances inutiles au genre de vie que nous professons, uniquement pour faire montre & pour parler, c'est une curiosité que je ne sçaurois approuver: mais je ne puis non plus goûter, que dans les choses nécessaires on s'en tienne à l'usage & à la pratique; je conseille fort de remonter plus haut. Il est absurde que ceux qui s'appliquent à la danse & aux instrumens, souffrent qu'on les instruise de la cadence & de la Musique, qu'ils s'éxercent même à la lutte, parce que cet éxercice passe pour contribuer à la perfection des deux autres; & que des gens qui aspirent au commandement des Armées, trouvent mauvais qu'on leur inspire quelque teinture des autres Arts & des autres Sciences. De simples Artistes seront-ils donc plus appliqués & plus vifs à se surpasser les uns les autres, que ceux qui se proposent de briller dans la plus belle & la plus auguste des dignités? Il n'y a personne de bon sens qui ne reconnoisse combien cela est peu raisonnable.*

La plûpart des hommes jugeant de la grandeur d'une Ville ou d'un Camp par la circonférence, regardent comme une chose incroyable, que, quoique Mégalopolis ait de tour cinquante stades, & que Lacédémone n'en ait que quarante-huit, cette dernière Ville soit cependant une fois plus grande que l'autre. Que si, pour augmenter la difficulté, on leur dit qu'il peut se faire qu'une Ville ou un Camp de quarante stades de tour soit une fois plus grand qu'un autre de cent stades, c'est pour eux un paradoxe. La cause de cela est qu'on ne se souvient plus de ce que l'on a appris de Géométrie pendant sa jeunesse.

Il y en a qui sont dans une autre erreur; ils prétendent que les Villes d'un terrein rompu & inégal ont plus de maisons que celles qui sont bâties dans un terrein plat & uni. Il n'en est pourtant pas ainsi: Polybe en donne la Démonstration que nous avons rapportée; puis il continue: *Soit dit en passant en faveur de ceux qui, quoique neufs & ignorans sur*

cette étendue est égale à la base horisontale de la colline. En voulez-vous une démonstration bien

cette matière, viennent cependant commander les Armées & avoir la conduite des affaires. J'ai crû devoir mettre ici ce long passage, pour faire connoître la manière de Polybe, & le mérite de la Traduction de Dom Vincent Thuillier.

Je prens cette occasion de payer le tribut d'éloge si légitimement dû aux deux illustres Auteurs modernes qui ont travaillé sur Polybe; je veux parler de Dom Vincent Thuillier, Bénédictin de la Congrégation de saint Maur, & de M. de Folard, Chevalier de l'Ordre Militaire de saint Louis, Mestre de Camp d'Infanterie. Le prémier a traduit Polybe, & le second l'à commenté.

La Traduction de Dom Vincent Thuillier est très-belle; le Polybe Grec n'a rien perdu de sa réputation dans le Polybe François: il feroit difficile de soutenir mieux la dignité de son sujet. Si Dom Vincent Thuillier n'a pas suivi quelque tems le parti des armes, il faut qu'il soit doué d'une très-grande pénétration, pour avoir rendu d'une manière si claire & si précise une Histoire, où il n'est guères question que de faits militaires.

Mais le Commentaire du célèbre M. de Folard me paroît unique; les grandes parties de la guerre y sont développées & démontrées presque aussi rigoureusement que les propositions de Géométrie: la discipline Militaire, les évolutions, les armes, les marches, les campemens, les surprises, les batailles, le passage des grandes Rivières, la guerre offensive, la défensive, la guerre des montagnes, l'attaque & la défense des places, la sureté des convois, les espions, c'est-à-dire, en remontant aux causes qui déterminent les événemens. Son Traité de la Colonne est un morceau achevé. Polybe, en bien des endroits, ne peut être entendu que par des Militaires qui ont réfléchi sur une longue expérience; pour comprendre cet Auteur, il faut être homme de guerre, & quelquefois même un grand homme de guerre: M. de Folard enseigne à l'être. Son érudition est très-étendue; elle lui donne lieu de comparer les faits, & de peindre toujours par les actions un grand nombre de personnages, dont les vices & les défauts ne sont pas moins utiles à l'instruction que leurs vertus & leurs belles qualités. Les Héros qui ont fait le plus de bruit, ceux dont une longue suite de siècles paroît avoir assûré la réputation, n'ont pas pour cela plus de droit a son estime: il ne l'accorde qu'aux actions judicieuses; il y en a de très-éclatantes qu'il a le courage de mettre *au nombre des accidens & des hasards, parce qu'elles ne sont fondées sur aucune raison solide, & que ce qui se fait à la guerre sans but & sans dessein, ne mérite pas le nom d'actions.*

Je ne finis qu'avec peine sur les louanges que mérite l'excellent Ouvrage de M. le Chevalier de Folard: je me flatte que le Lecteur me pardonnera cette longue digression en faveur d'un Écrivain qui fait tant d'honneur à notre nation, & dont, je ne sçais par quelle fatalité, il me semble que les étrangers font plus d'usage que nous: nos jeunes Militaires devroient le lire au moins une fois tous les six mois; indépendamment de leur métier, ils y apprendront à s'exprimer avec noblesse: plusieurs personnes lui reprochent une trop grande prolixité; d'autres le trouvent fort excusable, parce qu'il s'agit principalement d'instruire: ce qui est inutile à ceux qui sçavent la guerre, est

sensible, & qui parle aux yeux? Regardez la figure 55, qui peut représenter une Ville située sur toute la pente d'une colline, où tous les édifices élevés perpendiculairement à l'horison sont d'égale hauteur, c'est-à-dire, que leurs extrémités T, T, &c. supérieures, sont également éloignées de la base horisontale A B : il est évident qu'il n'y aura pas plus d'édifices sur la ligne serpentante A C D H B, que sur la droite horisontale T T T ; mais cette ligne est égale à la base A B ; par conséquent on ne sçauroit construire plus d'édifices sur la pente d'une colline, que sur le plan horisontal qui lui sert de base : ainsi les terreins destinés aux plantations doivent être mesurés par le plan horisontal qui leur répond ; ceux qui les évaluent suivant la surface de leur pente, vont directement contre les principes de la vraie Physique, & commettent des erreurs très-considérables.

Car supposons qu'un verger en forme de parallélogramme réctangle A B C D (*fig.* 56.) soit incliné de 30 dégrés à l'horison ; que sa longueur A B = 8 perches, & que sa largeur A D (sur laquelle se prend l'inclinaison) en contienne 4 : en mesurant ce verger suivant sa pente, son terrein contiendra 32 perches quarrées ; mais en l'éva-

nécessaire à ceux qui l'apprennent. Cela me fait souvenir d'un endroit fort remarquable dans la vie de M. le Marquis de Feuquières. *Il y a un grand nombre de ces maximes* (militaires) *qui paroîtront peut-être à certains esprits de peu de valeur, parce qu'elles sont d'un usage trop commun. Mais c'est pour cela même que le Marquis de Feuquières les croyoit plus nécessaires.*

Il lisoit à un de ses amis le Chapitre de l'ouverture de la tranchée, où il marque qu'il faut jetter les terres du côté de la place ; cette observation parut triviale. N'importe, répondit-il, il faut la laisser. Auroit-il prévû qu'on dût y manquer au dernier Siége de Philisbourg? Cette faute ne peut être attribuée qu'à l'Officier qui conduisoit les Travailleurs, & qui les a placés d'un côté de la trace de la tranchée, lorsqu'il auroit dû les placer de l'autre. Il n'est pas moins surprenant que personne ne s'en soit apperçû que le matin. On ne sçauroit donc être trop attentif à instruire les jeunes Officiers.

luant, comme on le doit, eû égard à ſon plan horiſontal, on ne trouvera que 27 perches, 6 toiſes, 12 pieds quarrés. La fauſſe meſure excède donc la véritable de 38 toiſes quarrées, & 24 pieds quarrés ; ce qui eſt un très-grand objet ſur 27 perches, 6 toiſes, 12 pieds quarrés.

DÉMONSTRATION.

Puiſque l'inclinaiſon du verger ſe prend ſuivant la largeur A D = 4 perches ; ſoit A M, une ligne horiſontale (*fig.* 57.) ſur laquelle A D ſoit élevée de 30 dégrés ; c'eſt-à-dire, qu'en décrivant un cercle du point A avec la ligne A D, on faſſe l'angle D A M = 30 dégrés. Imaginez la perpendiculaire D S ſur l'horiſontale A M : cette perpendiculaire déterminera la largeur A S du plan horiſontal qui répond au plan incliné A B C D ; cherchons donc la valeur de A S.

Remarquons d'abord qu'en prenant un arc M O égal à l'arc D M, on aura D M O = 60 dégrés ; ainſi D S O qui eſt la corde de cet arc, vaut le rayon A D : car il a été prouvé (n°. 119.) que le rayon du cercle étoit égal à la corde de 60 dégrés. De plus D A O étant un triangle iſocèle, la perpendiculaire A S diviſera la baſe D S O en deux parties égales (n°. 79.) D S eſt donc la moitié du rayon A D = 4 perches : ainſi D S = 2 perches.

Conſidérons préſentement le triangle réctangle A D S : le quarré de l'hypothénuſe A D eſt égal à la ſomme des quarrés faits ſur les deux autres côtés D S, A S (n°, 186.) c'eſt-à-dire, $\overline{AD}^2 = \overline{AS}^2 + \overline{DS}^2$. Donc $\overline{AD}^2 - \overline{DS}^2 = \overline{AS}^2$; ou (en ſubſtituant les nombres à la place des lignes A D,

AD, DS) $16 - 4 = \overline{AS}^2 = 12$. Donc $AS = \sqrt{12}$ perches quarrées.

Pour avoir la valeur de AS très-approchée, réduisez 12 perches quarrées en 559872 pouces quarrés, dont la racine quarrée = 748 pouces courans, valeur de AS, qui exprime la véritable largeur du verger incliné ABCD. Multipliant donc la longueur AB = 8 perches ou 1728 pouces, par la largeur 748, le produit 1292544 donnera en pouces quarrés la surface du verger ; & rappellant ce dernier nombre à de plus grandes mesures, on trouvera que le terrein ABCD qui contiendroit 32 perches quarrées, s'il n'avoit aucune pente, ne pourra être évalué que sur le pied de 27 perches 16 toises, 12 pieds quarrés, lorsqu'il sera incliné de 30 dégrés à l'horison (*a*).

(*a*) Ceci est surtout à considérer dans la coupe des bois ; les Acheteurs sont exposés à les payer beaucoup plus qu'ils ne croyent, principalement le *bois taillis*, qui se vend suivant l'étendue du terrein qu'il occupe.

Il faut donc sçavoir que l'on distingue deux sortes de bois ; *bois de haute futaye & bois taillis*. Le bois de haute futaye est un bois que l'on a laissé croître en grands arbres ; on ne lui donne guères ce nom avant l'âge de quarante ou cinquante ans : il y en a qui ont cent ans, & même deux cens ans ; dans les ventes on ne sçauroit tromper les Acheteurs sur la quantité de ce bois, parce que les arbres de haute futaye se comptent facilement.

Le bois taillis est fort différent [illegible] qu'il n'est pour ainsi dire qu'en branches, à cause qu'on ne lui donne pas le tems de parvenir à un accroissement où il puisse mériter le nom d'arbres ; la coupe s'en fait ordinairement de neuf en neuf ans : comme il n'est pas possible de compter toutes les branches qui entrent dans un bois que l'on met en vente, le bois taillis se vend à l'arpent ; c'est-à-dire, que l'on détermine une certaine étendue de terrein pour vendre le bois qui est dessus.

Or, en supposant que les différentes portions de ce terrein soient également favorables aux bois, on voit combien il est important de se rendre attentif aux pentes, aux creux, aux inégalités dont il est coupé. Car si les Arpenteurs ont égard aux pentes ou aux creux, il est certain que les Acheteurs seront trompés ; puisque, à surface égale, il croîtra nécessairement plus d'arbres sur un terrein horison-

Pour mesurer un côteau, il est donc nécessaire de connoître la largeur du plan horisontal, qui lui répond; cependant, comme ce plan s'étend sous le côteau jusqu'à la rencontre des perpendiculaires que l'on supposeroit abbaissées du sommet de ce côteau, il ne paroît pas aisé de connoître cette largeur : néanmoins le moyen en est si simple, qu'on va le comprendre à la seule exposition.

PROBLÊME XC.

209. *Trouver la largeur A S du plan horisontal A B O S, par lequel on doit mesurer le côteau A B C D, (fig. 56.)*

RÉSOLUTION.

Voyez la figure 58, dans laquelle A S représente la largeur du plan qui répond à la pente D A. Sur le sommet D du côteau placez horisontalement une grande équerre D L G, dont les branches D L, L G, soient d'une grandeur connue. Faites successivement la même opération aux points G, O, en marchant sur la même ligne D G O A : les trois longueurs D L, G P, O T, vous donneront la largeur A S du plan horisontal qui répond au côteau. Il y a plus, les trois lignes L G, P O, T A, en mesureront la hauteur D S. Cela parle aux yeux.

210. Nous avons dit que les inégalités & la pente des terreins devoient être considérées, quand il s'agissoit de les revêtir ; parce que le revêtement doit envelopper tout le terrein, qu'il en suit les creux, les convéxités, tous les contours : en ce cas on divisera la surface des collines en quarrés, en parallélogrammes ou en triangles, qui soient assez

tal ou de niveau, que sur un terrein incliné, ainsi que je l'ai démontré dans l'observation du n°. 208.

petits pour ne pas différer sensiblement de surfaces planes ; on les évaluera sur le pied de veritables plans, ainsi que nous l'avons enseigné très-au long dans ce Chapitre.

211. Quand on a deux dimensions, dont une ou toutes les deux sont composées de perches, de toises, de pieds, de pouces, &c. & qu'il s'agit de les multiplier l'une par l'autre, on a vû que l'on réduisoit ces deux dimensions à la plus petite espèce, c'est-à-dire, que si elles contenoient des perches, des toises & des pieds, on mettoit en pieds l'une & l'autre dimension, & qu'on les réduisoit en pouces, en lignes ou en points, quand avec les perches, les toises les pieds, il se trouvoit outre cela quelques pouces, quelques lignes ou quelques points ; que ces deux dimensions ainsi réduites, par exemple, en pouces, se multiplioient l'une l'autre, & donnoient en pouces quarrés la valeur du terrein, auquel ces dimensions appartenoient ; qu'il falloit ensuite déterminer, par le secours de la division, les perches, les toises ou les pieds quarrés contenus dans ces pouces quarrés.

Mais cette opération est d'un grand détail, elle marche très-lentement vers le résultat que l'on cherche. Cependant les Arts tendent à l'épargne du tems. On ne veut pas seulement arriver, on veut arriver vîte. En considérant des quantités d'une autre espèce que celle dont nous avons fait mention jusqu'à présent, le calcul en devient beaucoup plus expéditif : si avec cela la Théorie n'en est pas plus profonde, il doit être préféré dans la pratique ; or c'est ce que nous allons faire voir, en exposant le Principe & la Méthode de ce calcul.

CHAPITRE II.

DU TOISÉ DES SURFACES.

Méthode plus simple que celle dont on s'est servi dans le Chapitre précédent. Exposition du principe de cette méthode. Application à des Exemples.

212. EXAMINONS la figure ABCD (*fig.* 59.) où nous supposerons que AB ou DC = 3 toises ; que DA perpendiculaire sur AB = 1 toise: à cette condition le Réctangle ABCD = 3 toises quarrées. A la ligne AB ajoutons BF = 1 pied : le Réctangle BCOF est ce que l'on appelle *un pied de toise quarrée ;* & comme il y a 6 pieds courans dans une toise courante, il s'ensuit qu'une toise quarrée contient 6 pieds de toise quarrée, comme le montre plus particuliérement la toise quarrée ARSD, dont on a divisé les côtés opposés AR, DS en pieds, afin d'avoir six Réctangles, dont chacun contient un pied de base sur une toise de hauteur, ou, ce qui revient au même, un pied de hauteur sur une toise de base. Un pied de toise quarrée est donc un Réctangle large d'un pied & long d'une toise. Il est contenu 6 fois dans une toise quarrée : or une toise quarrée contient 36 pieds quarrés ; ainsi un pied de toise quarrée = 6 pieds quarrés, qui sont la sixième partie d'une toise quarrée.

Prenons encore FY = 1 pouce : le Réctangle OFYX est *un pouce de toise quarrée ;* c'est-à-dire, une surface longue d'une toise & large d'un pouce.

Il y a 12 pouces dans un pied, & 72 pouces dans une toise. Ainsi le pied de toise quarrée contient 12 pouces de toise quarrée, & la toise quarrée = 72 pouces de toise quarrée.

De même *une ligne de toise quarrée* est un Réctangle dont la longueur = une toise, & la largeur vaut une ligne.

Un point de toise quarrée est aussi une surface longue d'une toise, & large d'un point.

Cette manière d'envisager les surfaces pour en calculer l'aire est très-commode; parce que la toise quarrée = 6 pieds de toise quarrée. Le pied de toise quarrée = 12 pouces de toise quarrée. Le pouce de toise quarrée = 12 lignes de la même toise, & la ligne de toise quarrée en vaut 12 points; ce qui ramène le principe du calcul des surfaces à celui des longueurs, où l'on doit être très-éxercé avant d'arriver à celui-ci.

PREMIER ÉXEMPLE.

Où l'on donne la manière de toiser une surface dont la longueur contient des toises, des pieds, des pouces, & la largeur ne contient que des toises.

231. *Supposons qu'il s'agisse de multiplier 3 toises, 1 pied, 1 pouce, par une toise.*

OPÉRATION.

Toises.	Pieds.	Pouces.	
3	1	1	
1			(A)
3	1	1	

Disposez ces deux dimensions l'une sous l'autre comme vous le voyez en A, & commençant par les pouces, multipliez successivement 1 pouce, 1 pied, 3 toises par 1 toise; dites: 1 pouce par 1 toise = 1 pouce de toise quarrée, c'est-à-dire, suivant le principe que nous venons d'établir (n°. 212.) = un Réctangle long d'une toise & large d'un pouce; écrivez 1 sous les pouces. Ensuite: 1 toise par 1 pied = 1 pied de toise quarrée; écrivez 1 sous les pieds; enfin: une toise par 3 toises = 3 toises quarrées; marquez 3 sous les toises: ensorte que par cette méthode de calcul 3 toises, 1 pied, 1 pouce, multipliés par 1 toise, donnent 3 toises quarrées, 1 pied de toise quarrée & 1 pouce de toise quarrée. Le Problême est donc aussitôt résolu qu'il est proposé.

Mais en travaillant par les pieds & les pouces quarrés, on auroit mis d'abord trois toises, un pied, un pouce, en pouces, pour avoir 229 pouces: on auroit réduit pareillement une toise en 72 pouces; après cela multipliant 229 pouces par 72 pouces, dont le produit seroit 16488 pouces quarrés, il faudroit diviser ce produit par 5184, afin d'avoir les toises quarrées contenues dans 16488, à cause que la toise quarrée = 5184 pouces quarrés: cette division donneroit 3 toises quarrées au quotient; il resteroit encore 936 pouces quarrés que l'on réduiroit en pieds quarrés, en divisant 936 par 144, parce que le pied quarré = 144 pouces quarrés; on trouveroit au quotient 6 pieds quarrés = 1 pied de toise quarrée, & 72 pouces quarrés de reste = 1 pouce de toise quarrée: calcul énorme en comparaison du précédent, qui s'est trouvé fait dès-là qu'il a été proposé.

C'est pourquoi nous allons continuer à calculer l'aire des surfaces sur le principe du n°. 212. en parcourant les différens cas qui pourroient apporter quelque embarras aux Commençans.

DEUXIÈME EXEMPLE

Semblable au premier.

214. *On propose de multiplier 10 toises, 4 pieds, 8 pouces par 5 toises.*

OPÉRATION.

Toises.	Pieds.	Pouces.
10	4	8
5		
53	5	4

Disposez ces deux dimensions, comme vous avez fait au premier Exemple; après quoi vous multiplierez 5 toises par 8 pouces = 40 pouces de toise quarrée, parce que, suivant le principe du n°. 212, les pouces qui multiplient des toises, donnent des pouces de toise quarrée, dont il en faut 12 pour un pied de toise quarrée. Posez donc 4 sous les pouces; & retenant 3 pieds de toise quarrée, vous direz : 5 toises par 4 pieds = 20 pieds de toise quarrée, lesquels ajoutés aux 3 pieds que l'on a retenus, donnent 23 pieds de toise quarrée, qui valent 3 toises quarrées, & 5 pieds de toise quarrée; vous poserez donc 5 sous la colonne des pieds, & vous retiendrez 3 toises quarrées pour la colonne suivante, où multipliant 5 toises par 10 toises, vous aurez 50 toises quarrées, ausquelles vous ajouterez les 3 toises de la colonne précédente, pour avoir en tout 53 toises quarrées, 5 pieds de toise quarrée & 4 pouces de la même toise.

TROISIÈME EXEMPLE.

215. *Pour multiplier 59 toises, 2 pieds, 7 pouces, par 75 toises.*

OPÉRATION.

	Toises.	Pieds.	Pouces.	
	59	2	7	
	75			
	295			
	413			(B)
Pour 2 pieds	25			
Pour 6 pouces	6	1	6	
Pour 1 pouce	1	0	3	
	4457	1	9	

On commencera par multiplier 59 toises par 75 toises, ainsi qu'il est éxécuté en B : car si l'on multiplioit, comme dans les Éxemples précédens, 7 pouces par 75 toises, on auroit besoin de la division pour réduire en pieds le grand nombre de pouces qui proviendroient de cette multiplication ; ce que l'on doit toujours éviter.

Cette première Opération étant faite, il s'agit de multiplier 2 pieds par 75 toises : pour cela considérez que si les 2 pieds valoient 1 toise, vous auriez 75 toises quarrées ; mais 2 pieds ne sont que le tiers d'une toise ; vous ne prendrez donc que le tiers de 75 = 25 toises, que vous écrirez sous la colonne des toises. Il reste à multiplier 7 pouces par 75 toises. Prenons d'abord la valeur de 6 pouces, nous prendrons ensuite celle de 1 pouce : or 6 pouces sont le quart de deux pieds ; mais 2 pieds multipliés par 75 ont donné 25 toises quarrées, par conséquent le quart de 2 pieds ou 6 pouces multipliés par 75 toises produiront le quart de 25

toises quarrées; vous direz donc : le quart de 25 toises quarrées = 6 toises quarrées, que vous poserez au rang des toises quarrées ; mais il reste 1 toise quarrée qui vaut 6 pieds de toise quarrée : vous prendrez le quart de 6 = 1 pied de toise quarrée ; vous écrirez 1 sous la colonne des pieds : il reste encore 2 pieds de toise quarrée = 24 pouces, dont le quart = 6 pouces de toise quarrée; vous marquerez 6 sous la colonne des pouces.

Enfin vous multiplierez 75 toises par 1 pouce, pour avoir 75 pouces de toise quarrée = 1 toise quarrée, & 3 pouces de toise quarrée : écrivez 1 au rang des toises, & 3 sous les pouces. Après cela, faisant l'addition de ces différens produits, vous trouverez que leur somme = 4457 toises, 1 pied, 9 pouces de toise quarrée.

QUATRIÈME EXEMPLE.

216. *On demande le produit de 45 toises, 5 pieds, 11 pouces, 9 lignes par 34 toises.*

OPÉRATION.

	Toises.	Pieds.	Pouces.	Lignes.
	45	5	11	9
	34			(C)
	180	0	0	0
	135			
Pour 3 pieds	17	0	0	0
Pour 2 pieds	11	2	0	0
Pour 6 pouces	2	5	0	0
Pour 3 pouces	1	2	6	0
Pour 2 pouces		5	8	0
Pour 6 lignes		1	5	0
Pour 3 lignes			8	6
	1563	5	3	6

Après les avoir disposées, comme elles le sont en C, on multipliera d'abord 45 toises par 34 toises.

Après quoi l'on passera à la multiplication de 5 pieds par 34 toises; & afin que cette Opération cause moins d'embarras, on considérera 5 pieds comme 3 pieds, & 2 pieds, dont le premier nombre est la moitié d'une toise, & le second en est le tiers. Faites donc ce raisonnement : si 3 pieds étoient 1 toise, 3 pieds multipliés par 34 toises donneroient 34 toises quarrées; mais 3 pieds ne sont que la moitié d'une toise; on prendra donc la moitié de 34 = 17 toises quarrées, que l'on écrira au rang des toises. Par la même raison 2 pieds n'étant que le tiers d'une toise, il ne faudra prendre que le tiers de 34 toises pour le produit de 2 pieds par 34 toises; ainsi l'on dira : le tiers de 34 = 11 toises quarrées, & il reste une toise, dont le tiers = 2 pieds de toise quarrée; écrivez donc 11 toises sous les toises, & 2 pieds sous les pieds.

Il s'agit présentement de multiplier 11 pouces par 34 toises. Soit donc, pour la commodité du calcul, le nombre 11 coupé en 6, 3, 2; prenons d'abord pour 6 pouces qui sont le quart de deux pieds : or 2 pieds multipliés par 34 toises ont produit 11 toises 2 pieds; ainsi le produit de 6 pouces par 34 toises doit être le quart de 11 toises 2 pieds = 2 toises 5 pieds, que l'on trouve en disant : le quart de 11 = 2 toises; il reste 3 toises = 18 pieds, lesquels ajoutés à 2 = 20 pieds, dont le quart = 5 pieds de toise quarrée.

Pour 3 pouces on prendra la moitié de la valeur de 6 pouces : or 6 pouces par 34 toises viennent de nous donner 2 toises 5 pieds; ainsi 3 pouces par 34 toises donneront la moitié de 2 toises 5 pieds = 1 toise 2 pieds 6 pouces, que vous écrirez dans le rang qui convient à chaque espèce de quantité.

Il reste encore 2 pouces à multiplier par 34 toises; & comme 2 pouces sont le tiers de 6 pouces, on prendra le tiers du produit de 6 pouces par 34 toises, c'est-à-dire, le tiers de 2 toises 5 pieds, en disant: le tiers de 2 n'est point; on mettra les 2 toises en pieds, & l'on aura 12 pieds, lesquels ajoutés à 5 = 17 pieds, dont le tiers = 5 pieds: il reste 2 pieds = 24 pouces, dont le tiers = 8 pouces de toise quarrée, que vous écrirez en place convenable.

Passons à la multiplication de 9 lignes par 34 toises, & considérons que 9 lignes = 6 lignes & 3 lignes; mais 6 lignes sont le quart de 2 pouces: prenons donc le quart de la valeur de 2 pouces que nous avons trouvée de 5 pieds 8 pouces; disons donc: le quart de 5 pieds est 1 pied; il reste 1 pied = 12 pouces, lesquels ajoutés à 8 pouces = 20 pouces, dont le quart = 5 pouces de toise quarrée; de sorte que le produit de 34 toises par 6 lignes est 1 pied, 5 pouces de toise quarrée: on écrira 1 au rang des pieds, & 5 sous la colonne des pouces.

Enfin on prendra pour le produit de 3 lignes par 34 toises, la moitié du produit de 6 lignes par 34 toises que l'on vient de trouver = 1 pied 5 pouces de toise quarrée; ainsi l'on dira: la moitié de 1 n'est point; on mettra le pied en 12 pouces, lesquels ajoutés à 5 = 17 pouces, dont la moitié = 8 pouces: il reste 1 pouce = 12 lignes, dont la moitié est 6 lignes. Le produit de 3 lignes par 34 toises est donc 8 pouces, 6 lignes de toise quarrée. On écrira ce produit sous les colonnes qui lui conviennent, & faisant l'addition de tous les produits que l'on a trouvés successivement, on voit que 45 toises, 5 pieds, 11 pouces, 9 lignes, multipliées par 34 toises, donnent 1563 toises, 5 pieds, 3 pouces, 6 lignes de toise quarrée.

CINQUIÈME EXEMPLE.

217. *Quel est le produit de 15 toises, 5 pouces, par 18 toises.*

OPÉRATION.

	Toises.	Pieds.	Pouces.
	15	0	5
	18		
	120		
	15 .		
Pour 1 pied	3	0	0
Pour 4 pouces	1	0	0
Pour 1 pouce	.	1	6
	271	1	6

Ayant multiplié à l'ordinaire 15 toises par 18 toises, il s'agit de multiplier 5 pouces par 18 toises. Pour y parvenir plus facilement, nous supposerons que 5 pouces soient 1 pied, & nous dirons : 18 toises multipliées par une toise donneroient 18 toises quarrées ; mais 1 pied n'est que la sixième partie de 1 toise ; donc 18 toises multipliées par 1 pied produiront le sixième de 18 toises quarrées = 3 toises quarrées : vous écrirez 3, sur lequel vous tirerez un trait, parce que ce nombre ne doit point entrer dans l'addition des produits que nous cherchons ; son usage est de faire trouver plus commodément le produit de 5 pouces par 18 toises ; mais 5 pouces valent 4 pouces & 1 pouce. Or 4 pouces sont le tiers de 1 pied ; par conséquent le produit de 4 pouces par 18 toises n'est que le tiers du produit de 1 pied par 18 toises : nous avons vû que ce dernier produit étoit 3 toises quarrées ; vous direz donc : le tiers de 3 = 1 : écrivez 1 sous la colonne des toises.

Il reſte à trouver la valeur de 1 pouce par 18 toiſes ; mais 1 pouce eſt le quart de 4 pouces ; prenez donc le quart de la valeur de 4 pouces, en diſant : le quart de 1 n'eſt point ; mais une toiſe = 6 pieds, dont le quart = 1 pied ; il reſte 2 pieds = 24 pouces, dont le quart = 6 pouces de toiſe quarrée ; de ſorte que le produit de 18 toiſes par 1 pouce = 1 pied & 6 pouces de toiſe quarrée. Marquez 1 ſous la colonne des pieds, & 6 ſous celle des pouces : faites enfin l'addition des différens produits que vous venez de trouver ; vous aurez 271 toiſes, 1 pied, 6 pouces de toiſe quarrée, pour le produit de 15 toiſes, 5 pouces, par 18 toiſes.

SIXIÈME EXEMPLE.

218. *Déterminer le produit de 25 toiſes, 3 pieds, 8 lignes, par 32 toiſes.*

OPÉRATION.

	Toiſes.	Pieds.	Pouces.	Lignes.
	25	3	0	8
	32			
	50			
	75			
Pour 3 pieds	16			
Pour 1 pied	5	2		
Pour 1 pouce		2	8	
Pour 6 lignes		1	4	
Pour 2 lignes			5	4
	816	1	9	4

Commencez par multiplier 25 toiſes par 32 toiſes : cette Opération étant finie, vous chercherez le produit de 3 pieds par 32 toiſes, en obſer-

vant que 1 toise multipliée par 32 toises produiroit 32 toises quarrées : or 3 pieds ne sont que la moitié d'une toise ; ainsi 3 pieds multipliés par 32 toises = 16 toises quarrées. Écrivez donc 16 sous les toises.

Il faut maintenant trouver le produit de 8 lignes par 32 toises : cherchons d'abord celui de 1 pied pour avoir le produit de 1 pouce, d'où nous tirerons celui de 8 lignes ; mais puisque le produit de 3 pieds = 16 toises quarrées, celui de 1 pied sera le tiers de 16 toises = 5 toises, & il reste 1 toise = 6 pieds, dont le tiers = 2 pieds ; écrivez donc 5 toises, 2 pieds, que vous couperez par un trait. Prenons encore le produit de 1 pouce : c'est le douzième de 1 pied ; disons donc : le douzième de 5 toises n'est point ; mais 5 toises quarrées = 30 pieds de toise quarrée, lesquels ajoutés à 2, font 32 pieds de toise quarrée, dont le douzième = 2 pieds, & il reste 8 pieds = 96 pouces, dont le douzième = 8 pouces de toise quarrée. Écrivez 2 pieds, 8 pouces, que vous couperez encore d'un trait ; parce que ce produit, comme le précédent, n'est supposé que pour arriver plus facilement à celui de 32 toises par 8 lignes, qu'il nous faut à présent déterminer.

Prenons pour 6 lignes : c'est la moitié du produit de 1 pouce ; on aura donc 1 pied, 4 pouces : écrivons 1 sous les pieds, & 4 sous les pouces ; il reste encore à trouver le produit de 2 lignes, c'est-à-dire, le tiers de 6 lignes ; il faut donc prendre le tiers de 1 pied, 4 pouces = 5 pouces, 4 lignes. Après cela, faisant l'addition de tous ces produits, on trouvera que 25 toises, 3 pieds, 8 lignes, multipliées par 32 toises, donnent 816 toises, 1 pied, 9 pouces, 4 lignes.

SEPTIEME EXEMPLE.

219. *Trouver le produit de 13 toises, 5 lignes; par 19 toises.*

OPÉRATION.

	Toises.	Pieds.	Pouces.	Lignes.
	13	0	0	5
	19			
	117			
	13.			
Pour 1 pied	3	1		
Pour 1 pouce		1	7	
Pour 4 lignes			6	4
Pour 1 ligne			1	7
	247	0	7	11

On multipliera à l'ordinaire 13 toises par 19 toises; après quoi on aura à multiplier 5 lignes par 19 toises; mais auparavant on supposera le produit de 1 pied, & celui de 1 pouce, pour en déduire avec plus de facilité celui de 5 lignes: or 1 pied par 19 toises = 3 toises, 1 pied, que vous couperez d'un trait. Prenons encore le produit de 1 pouce, c'est le douzième de 1 pied. Disons donc: le douzième de 3 toises n'est point; mettant les 3 toises en pieds, ausquels nous ajouterons 1, nous aurons 19 pieds, dont le douzième = 1 pied de toise quarrée; il reste 7 pieds = 84 pouces, dont la douzième partie = 7 pouces de toise quarrée: écrivons 1 sous les pieds, & 7 sous les pouces, sur lesquels nous tirerons un trait. Il n'est pas difficile à présent d'avoir le produit de 5 lignes par 19 toises: car 5 lignes = 4 lignes & 1 ligne: or 4 lignes sont le tiers de 1 pouce; prenons le tiers de la valeur de 1 pouce que nous avons trouvé = 1,

pied, 7 pouces, en disant : le tiers de 1 pied n'est point ; mettant ce 1 pied en pouces, auquel on joindra 7 pouces, nous aurons 19 pouces, dont le tiers = 6 pouces, & il reste 1 pouce = 12 lignes, dont le tiers = 4 lignes de toise quarrée ; le produit de 4 lignes par 19 toises est donc 6 pouces, 4 lignes de toise quarrée : écrivons 6 sous les pouces, & 4 sous les lignes.

Il reste à trouver le produit de 1 ligne par 19 toises : c'est le quart de 4 lignes ; ainsi nous dirons : le quart de 6 est 1, & il reste 2 pouces = 24 lignes, ausquelles ajoutant 4 lignes, on a 28 lignes, dont le quart = 7 ; on écrira 1 sous les pouces, & 7 sous les lignes. On ajoutera tous les produits que l'on vient d'écrire, & l'on trouvera que le produit de 13 toises, 5 lignes par 19 toises = 247 toises, 7 pouces, 11 lignes de toise quarrée.

HUITIÈME EXEMPLE,

Où les deux dimensions qui se multiplient, sont composées chacune de toises, pieds, pouces, &c.

220. *Soit proposé de multiplier 12 toises, 1 pied, 7 pouces, 5 lignes, par 5 toises, 2 pieds, 9 pouces.*

OPÉRATION.

	Toises.	Pieds.	Pouces.	Lignes.	Points.
	12	1	7	5	0
	5	2	9		(M)
	60	5			
Pour 6 pouces		2	6		
Pour 1 pouce			5		
Pour 4 lignes			1	8	
Pour 1 ligne				5	
Pour 2 pieds	4	0	6	5	8
Pour 6 pouces	1	0	1	7	5
Pour 3 pouces		3	0	9	8 ½
	66	5	9	11	9 ½

Disposez

Disposez ces deux dimensions, comme vous le voyez en M; & sans faire d'abord attention aux 2 pieds, 9 pouces de la seconde dimension, multipliez successivement 12 toises, 1 pied, 7 pouces, 5 lignes par 5 toises, en disant: 5 fois 12 = 60 toises quarrées; écrivez 60 sous les toises; dites ensuite: 5 toises multipliées par 1 pied = 5 pieds de toise quarrée; écrivez 5 sous les pieds. Après cela, vous viendrez aux 7 pouces, que vous regarderez comme 6 pouces & 1 pouce. Vous direz donc: 6 pouces sont la moitié de 1 pied; par conséquent il faudra prendre la moitié du produit de 1 pied, & dire: la moitié de 5 pieds = 2 pieds, 6 pouces, que l'on écrira, pour chercher ensuite le produit de 1 pouce: c'est le sixième de 6 pouces, c'est-à-dire, le sixième de 2 pieds 6 pouces, ou de 30 pouces = 5 pouces de toise quarrée; écrivez 5 sous les pouces, & passez au produit de 5 toises par 5 lignes: or 5 lignes = 4 lignes & 1 ligne; prenez d'abord pour 4 lignes: c'est le tiers de la valeur de 1 pouce, ou le tiers de 5 pouces de toise quarrée = 1 pouce 8 lignes; en prenant encore le quart de ce dernier produit = 5 lignes de toise quarrée, on aura le produit de 5 toises par 1 ligne.

Cette première opération étant faite, on travaillera à trouver le produit de 12 toises, 1 pied, 7 pouces, 5 lignes, par 2 pieds; mais il est clair que si 2 pieds valoient 1 toise, le produit cherché seroit 12 toises, 1 pied, 7 pouces, 5 lignes de toise quarrée; & comme 2 pieds ne sont que le tiers d'une toise, on ne doit prendre que le tiers de 12 toises, 1 pied, 7 pouces, 5 lignes = 4 toises, 0 pied, 6 pouces, 5 lignes, 8 points de toise quarrée.

Il reste à trouver le produit de 12 toises, 1 pied, 7 pouces, 5 lignes, par 9 pouces, qui valent 6 pouces & 3 pouces. On prendra donc pour 6 pouces,

qui doivent produire le quart de la valeur de 2 pieds = 1 toise, 0 pied, 1 pouce, 7 lignes, 5 points: enfin la moitié de ce dernier produit, qui est 3 pieds, 9 lignes, 8 points $\frac{1}{2}$, donne la valeur de 3 pouces; faisant l'addition de tous les produits que l'on a trouvés, le résultat sera 66 toises, 5 pieds, 9 pouces, 11 lignes, 9 points $\frac{1}{2}$ de toise quarrée.

NEUVIÉME EXEMPLE.

221. *Trouver le produit de 39 toises, 3 pieds, 4 pouces, 9 lignes, par 7 toises, 4 pieds, 9 pouces.*

OPÉRATION.

Toises.	Pieds.	Pouces.	Lignes.	Points.	
39	3	4	9	0	
7	4	9			
273					
3	3				
	2	4			
		3	6		
		1	9		
276	5	9	3		Produit de 39 toises, 3 pieds, 4 pouces, 9 lignes, par 7 toises.
13	1	1	7		par 2 pieds.
13	1	1	7		par 2 pieds.
3	1	9	4	9	par 6 pouces.
1	3	10	8	4 $\frac{1}{2}$	par 3 pouces.
308	1	8	6	1 $\frac{1}{2}$	

Nous allons abréger le détail de cette Opération, afin que les Commençans s'accoutument à travailler par eux-mêmes.

Sans penser aux 4 pieds, 9 pouces, de la seconde dimension, on cherchera à l'ordinaire le produit de 39 toises, 3 pieds, 4 pouces, 9 lignes, par 7 toi-

ses, que l'on trouvera = 276 toises, 5 pieds, 9 pouces, 3 lignes. On passera ensuite à la recherche du produit de 39 toises, 3 pieds, 4 pouces, 9 lignes, par 4 pieds; en considérant que 4 pieds sont les 2 tiers de 1 toise, on prendra les deux tiers ou deux fois un tiers de 39 toises, 3 pieds, 4 pouces, 9 lignes = 13 toises, 1 pied, 1 pouce, 7 lignes, que l'on écrira deux fois.

Enfin comme 9 pouces = 6 pouces & 3 pouces, on cherchera le produit de 6 pouces, qui est le quart de 2 pieds = 3 toises, 1 pied, 9 pouces, 4 lignes, 9 points, dont la moitié 1 toise, 3 pieds, 10 pouces, 8 lignes, 4 points $\frac{1}{2}$, est le produit de 3 pouces. Enfin la somme totale est 308 toises, 1 pied, 8 pouces, 6 lignes, 1 point $\frac{1}{2}$.

DIXIEME EXEMPLE.

222. *On demande quel est le produit de 16 toises, 2 pieds, 7 pouces, 3 lignes, par 8 toises, 2 pouces, 4 lignes.*

OPÉRATION.

Toises.	Pieds.	Pouces.	Lignes.	Points.
16	2	7	3	0
8	0	2	4	
128				
2	4			
0	4			
.	0	8		
		2		
2	4	9	2	6
0	2	8	10	5
	0	5	5	8 $\frac{5}{6}$
132	0	0	4	1 $\frac{5}{6}$

On multipliera d'abord 16 toises, 2 pieds, 7 pouces, 3 lignes, par 8 toises, ainsi qu'on l'a déja pratiqué tant de fois. Après cela, on cherchera le produit de cette première dimension par 2 pouces; ce que l'on éxécutera plus commodément, en supposant le produit de 1 pied = 2 toises, 4 pieds, 5 pouces, 2 lignes, 6 points, sur lesquels on tirera un trait, afin qu'on ne les fasse pas entrer dans le résultat des différens produits; & comme 2 pouces sont le sixième de 1 pied, on prendra la sixième partie de la valeur de 1 pied = 2 pieds, 8 pouces, 10 lignes, 5 points.

Il reste à trouver la valeur de 4 lignes, qui sont un sixième de 2 pouces = 5 pouces, 5 lignes, 8 points & $\frac{5}{6}$ de point de toise quarrée : on fera la somme de tous les produits trouvés; elle sera 132 toises, 4 lignes, 1 point $\frac{5}{6}$.

ONZIÈME EXEMPLE.

223. *Déterminer le produit de 24 toises, 2 pouces, 6 lignes, par 20 toises, 4 lignes.*

OPÉRATION.

Toises.	Pieds.	Pouces.	Lignes.	Points.
24	0	2	6	0
20	0	0	4	(C)
480	3	4	0	
		10		
4	0	0	5	
	2	0	0	5
		8	0	1 $\frac{2}{3}$
480	4	10	0	1 $\frac{2}{3}$

Après avoir disposé les termes, comme ils le sont en C, on multipliera tous les termes de la première dimension par les 20 toises de la seconde, en disant : 24 fois 20 = 480 toises ; & au lieu de supposer le produit de 1 pied par 20 toises, afin d'avoir celui de 2 pouces, ainsi que nous l'avons pratiqué ci-devant, on dira tout d'un coup : 20 toises multipliées par 2 pouces = 40 pouces de toise quarrée = 3 pieds, 4 pouces; on écrira 3 pieds, 4 pouces : après quoi, 6 lignes multipliées par 20 toises = 120 lignes de toise quarrée = 10 pouces.

Il s'agira ensuite de multiplier 24 toises, 2 pouces, 6 lignes, par 4 lignes : pour cela, on supposera le produit de la première dimension par 1 pied, d'où l'on déduira celui de 1 pouce, pour avoir le produit de 4 lignes. Le produit de 1 pied = 4 toises, 5 lignes; & celui de 1 pouce = 2 pieds, 5 points : on coupera d'un trait ces deux produits, & l'on prendra le tiers du dernier = 8 pouces, 1 point, & $\frac{2}{3}$ de point pour la valeur de 4 lignes; & le produit total sera 480 toises, 4 pieds, 10 pouces, 1 point, & $\frac{2}{3}$ de point.

224. Nous ne croyons pas qu'il soit besoin d'un plus grand nombre d'Exemples : tous les cas un peu embarrassans ont été proposés & détaillés avec soin. On a laissé dans quelques-uns quelque chose à faire aux Commençans. En général même, lorsqu'ils seront un peu exercés au calcul du toisé, nous leur conseillons de travailler sur nos Exemples, sans lire le détail dont nous les avons accompagnés; en comparant leur résultat au nôtre, ils auront un moyen de s'assurer de la justesse de leur calcul.

Mais comme il est utile de vérifier ses Opérations, on ne doit pas ignorer les moyens d'y parvenir. Le plus simple est de recommencer; il n'est

pourtant pas rare de faire la même faute au même endroit ; c'est pourquoi il vaut mieux changer le point de vûe, doubler, par exemple, la première ou la seconde dimension, & prendre la moitié de l'autre ; les multiplier ensuite à l'ordinaire : le produit qui en résultera, doit être égal à celui que l'on avoit avant le changement. L'application de ce procédé à un seul Exemple ne laissera rien à désirer.

DOUZIEME EXEMPLE,

Où l'on expose un moyen très-simple de vérifier un Calcul.

225. Prenons l'Exemple précédent, où nous avons trouvé que le produit de 24 toises, 2 pouces, 6 lignes, par 20 toises, 4 lignes, étoit 480 toises, 4 pieds, 10 pouces, 1 point, & $\frac{2}{3}$ de point de toise quarrée. Doublons la première dimension : elle deviendra 48 toises, 5 pouces ; & la moitié de la seconde sera 10 toises, 2 lignes : multipliant donc 48 toises, 5 pouces, par 10 toises, 2 lignes ; nous devons retrouver 480 toises, 4 pieds, 10 pouces, 1 point & $\frac{2}{3}$, comme si l'on n'avoit fait aucun changement. Faisons le calcul.

OPÉRATION.

Toises.	Pieds.	Pouces.	Lignes.	Points.
48	0	5	0	0
10	0	0	2	
480	4	2		
8	0	0	10	
	4	0	0	10
		8	0	1 $\frac{2}{3}$
480	4	10	0	1 $\frac{2}{3}$

48 toises multipliées par 10 toises = 480 toises quarrées. Ensuite 5 pouces par 10 toises = 50 pouces de toise quarrée = 4 pieds 2 pouces. Pour avoir le produit de 48 toises, 5 pouces, par 2 lignes, on prendra celui de 1 pied = 8 toises, 10 lignes. Celui de 1 pouce vaut 4 pieds, 10 points de toise quarrée. On coupera d'un trait ces deux produits, & on prendra la sixième partie du dernier = 8 pouces, 1 point $\frac{2}{3}$ pour la valeur de 2 lignes. On cherchera le produit total, & l'on retrouvera, comme dans l'Exemple précédent, 480 toises, 4 pieds, 10 pouces, 1 point, & $\frac{2}{3}$.

DÉMONSTRATION.

Prenons un cas très-simple. Supposons que l'on ait 6 à multiplier par 4; il s'agit de prouver qu'en multipliant la moitié 3 du premier nombre par le double 8 du second, on aura précisément le même produit 24, que l'on auroit eu sans faire aucun changement : cela est assez évident ; car si vous n'avez pris que la moitié du premier nombre, par compensation vous l'avez multiplié par une quantité double : vous rétablissez d'un côté ce que vous aviez détruit de l'autre ; ainsi le même effet subsiste, C. Q. F. D.

Quand on sçait l'art d'évaluer les terreins, il est si facile d'en faire le partage, que nous ne sçaurions nous dispenser d'entretenir les Commençans sur différens Problêmes qui y ont rapport. Il en résulte une double utilité : l'esprit s'éxerce, il s'affermit sur ses principes, il étend ses vûes en même tems qu'il travaille pour son propre intérêt. Quoiqu'il y ait des hommes chargés par leur profession de partager les fonds de terre suivant les différentes conditions établies dans chaque Etat, on s'abuseroit

étrangement de penser que cela est suffisant. Tel qui se charge d'une opération, se charge encore plus souvent d'y commettre des fautes ; que ce soit mauvaise foi ou ignorance, l'expérience ne le prouve que trop.

Mais on remarque aussi que ceux qui ont la réputation d'être éclairés, ceux principalement qui le sont en effet, sont moins exposés aux fraudes des autres hommes : nous allons donc exposer la manière la plus simple de faire le partage d'un Terrein en tant de parties égales que l'on voudra.



CHAPITRE III.

Du Partage des Terreins.

226. LEs Terreins, dont le partage se présente à faire, sont des Parallélogrammes, des Trapèses, des Triangles, des Poligones réguliers; ou toute autre figure qui n'a aucune régularité. Nous allons résoudre ces différens cas, en supposant d'abord que nous puissions commencer la division de ces terreins par où l'opération nous paroîtra la plus commode : quand il faudra partir d'un point donné, nous produirons un moyen fort simple de résoudre cette difficulté.

PROBLÊME XCI.

227. Diviser un Triangle A B C en autant de parties égales qu'il est nécessaire, (*fig.* 60.)

RÉSOLUTION.

En prenant A C pour la base de ce Triangle, divisez cette base en autant de parties égales qu'on le demande, par éxemple, en 5 (cette division se fait sur le terrein, en toisant la base A C, qui contient, si l'on veut, 60 toises, dont la cinquième partie = 12 toises, que l'on portera 5 fois sur A C de A en 1, de 1 en 2, &c.) après quoi de l'angle opposé B, tirant les lignes B 1, B 2, &c. le Triangle A B C se trouvera divisé en 5 Triangles égaux en surface.

DÉMONSTRATION.

Tous ces Triangles s'étendent jusqu'au point B; ils ont par conséquent même hauteur : on a fait d'ailleurs leurs bases égales ; ils sont donc égaux en surface, (nº. 171.) C. Q. F. D.

PROBLÊME XCII.

228. Partager le Parallélogramme A B C D en 4 parties égales, ou en tout autre nombre de parties égales qu'il en sera besoin, (*fig.* 61.)

RÉSOLUTION.

Divisez, comme ci-devant, les côtés A B, D C, opposés, chacun en 4 parties égales, ou en 8, 10, 12, &c. si on le demande. Tirez les lignes 11, 22, 33 ; elles diviseront le Parallélogramme A B C D en 4 Parallélogrammes égaux.

DÉMONSTRATION.

Par la construction, ces Parallélogrammes ont des bases égales, & ils sont posés entre les mêmes parallèles A B, D C ; il est donc nécessaire qu'ils soient égaux (nº 170.) : ainsi le Parallélogramme A B C D est divisé comme on le demande, C. Q. F. D.

PROBLÊME XCIII.

229. Diviser en tant de parties égales que l'on voudra un Trapèse A B C D, dont les deux côtés A B, D C, sont parallèles, (*fig.* 62.)

RÉSOLUTION.

Divisez les deux côtés A B, D C, parallèles, chacun en 3 parties égales, si on le demande. Aux points 1, 2, tirez les lignes 11, 22 ; le grand

Trapèse se trouvera divisé en 3 autres Trapèses égaux en surface.

DÉMONSTRATION.

En traçant les lignes ponctuées A 1, 1 2, 2 C, on peut remarquer que le Trapèse AD 1 1 contient deux Triangles, 1 D A, 1 A 1, égaux aux deux Triangles 2 1 1, 2 1 2, chacun à chacun, qui composent le Trapèse 1 1 2 2 : car le Triangle 1 DA = le Triangle 2 1 1, de même base & de même hauteur (const.); & le Triangle 1 A 1 = le Triangle 2 1 2, par la même raison: ainsi le Trapèse A D 1 1 = le Trapèse 1 1 2 2.

On prouvera de même que le Trapèse 2 B C 2 = le Trapèse 1 1 2 2; & par conséquent que le grand Trapèse A B C D est divisé en trois parties égales, C. Q. F. D.

PROBLÊME XCIV.

2 3 0. Partager un Poligone régulier, par exemple, un Pentagone A B C D E, en 9 parties égales; ce qui peut servir de modèle pour le diviser en tant de parties égales que l'on voudra; (*fig.* 6 3.)

RÉSOLUTION.

Puisque l'on demande que le Pentagone régulier soit divisé en 9 parties égales, il est clair qu'en divisant chacun de ses côtés en neuf parties égales, si l'on tiroit des lignes de chaque point de division à son centre O, comme on l'a exécuté sur le côté AB, le Poligone se trouveroit divisé en 45 Triangles égaux, à cause qu'ils auroient même base & même hauteur; mais le neuvième de 45 = 5; par conséquent il faut que les lignes O A, O G, ou O G, O M, &c. renferment entr'elles 5 divisions prises de suite sur les côtés du Poligone; or

c'eſt ce que l'on a pratiqué ſur le Pentagone régulier A B C D E; ce Poligone eſt donc éxáctement diviſé en 9 parties égales, ce qui n'a pas beſoin d'autre démonſtration que le procédé même.

231. En général, pour diviſer la ſurface d'un Poligone régulier en autant de parties égales que l'on voudra, on diviſera chaque côté du Poligone en ce nombre de parties, & l'on tirera des lignes du centre de ce Poligone, telles que priſes deux à deux de ſuite, elles renferment autant de diviſions que le Poligone a de côtés. Si l'on propoſoit, par éxemple, de partager un Décagone régulier en 15 parties égales, on diviſeroit chaque côté de ce Poligone en 15 parties égales, (le Poligone étant régulier, la diviſion d'un ſeul côté ſuffiroit à celle des autres) & l'on renfermeroit 10 diviſions entre deux lignes tirées du centre aux côtés de ce Poligone. Tout cela eſt ſi ſimple que, pour en avoir l'évidence, la ſeule conſtruction eſt plus que ſuffiſante; on ne doit pourtant pas négliger de la faire éxécuter aux jeunes gens, afin qu'ils s'accoutument à voir dans une figure tout ce qui y eſt contenu.

232. On eſt quelquefois obligé de commencer le partage d'un Terrein par un point déterminé, auquel doivent ſe réunir toutes les portions d'un partage: cela arrive lorſque des héritiers ſouhaitent de poſſéder en commun un puits, par éxemple, dont ils voudroient avoir la jouiſſance, ſans ſortir du Terrein qui doit leur revenir; c'eſt un moyen d'éviter ce que l'on appelle *des ſervitudes*, qui conſiſtent en ce qu'un des héritiers eſt obligé de ſouffrir que les autres jouiſſent en commun de ce qui devroit lui être particulier, étant enfermé dans ſon lot.

Il n'y a rien de plus incommode que ces ſortes de ſujettions; c'eſt une ſource perpétuelle de démêlés. On rend donc un ſervice très-conſidérable,

lorſque l'on trouve les moyens d'éviter cet inconvénient, ce qui n'eſt pas toujours poſſible ; car les puits ſont quelquefois ſi proches des maiſons, qu'il faudroit les détruire afin d'éviter une ſervitude : remède qui feroit ordinairement pire que le mal. Nous ſuppoſons ici que l'on n'ait d'autre difficulté à vaincre, que celle de faire partir toutes les diviſions d'un point déterminé.

PRÉPARATION A LA RÉSOLUTION de ce Problême.

233. On doit ſe rappeller que l'on détermine l'aire ou la ſurface d'un Triangle, en multipliant ſa hauteur par la moitié de ſa baſe, ou ſa baſe par la moitié de ſa hauteur.

Ainſi la ſurface & la hauteur d'un Triangle (*fig.64.*) étant données, on a néceſſairement la longueur de ſa baſe : car ſoit l'aire du Triangle A B C $= 96$ toiſes quarrées, ſa hauteur B O $= 8$ toiſes courantes, & ſa baſe A C $= x$; on aura 96 toiſes $= BO \times \frac{AC}{2} = 8 \times \frac{x}{2} = 4x$. Ainſi $x = \frac{96}{4}$ $= 24$ toiſes courantes : en effet la baſe 24 toiſes multipliée par 4 toiſes, moitié de la perpendiculaire B O $= 8$, donne 96 toiſes quarrées pour la valeur du Triangle A B C.

On a donc un moyen très-ſimple de trouver la baſe d'un Triangle, dont la ſurface & la hauteur ſont connues. C'eſt de diviſer le nombre qui exprime la ſurface du Triangle, par celui qui repréſente la moitié de ſa hauteur ; le quotient de cette diviſion fera connoître la longueur de la baſe de ce Triangle. Il faut ſe familiariſer avec cette vérité ; elle va ſervir de principe au Problême que nous nous propoſons de réſoudre.

PROBLÊME XCV.

234. Diviser un Terrein quelconque ABCDE en autant de parties égales qu'il est nécessaire, à condition que toutes les divisions commenceront à un même point O pris au-dedans de la figure; (*fig.* 65.)

RÉSOLUTION.

Supposons qu'il s'agisse de partager ce terrein en 5 parties égales. On commencera par arpenter tout le terrein, où l'on pourra trouver 3000 toises quarrées, dont la cinquième partie = 600.

Après cette opération, du point O on imaginera les lignes OE, OD, tirées aux angles E, D, & l'on mesurera le Triangle OED, qui pourra ne contenir que 450 toises quarrées: ce Triangle sera plus petit de 150 toises que la cinquième partie du terrein à diviser; il faudra donc prendre sur le Triangle ODC un petit Triangle ODM, qui contienne 150 toises quarrées, lesquelles ajoutées aux 450 toises du Triangle OED, donnent au juste 600 toises quarrées, cinquième partie du terrein proposé.

Pour y parvenir, du point O on abbaissera la perpendiculaire OS sur le côté CD: on toisera cette perpendiculaire, à laquelle je suppose 60 toises; ces 60 toises expriment la hauteur du Triangle ODM, dont nous sçavons que l'aire doit contenir 150 toises quarrées; mais (n°. 233.) la surface & la hauteur d'un Triangle étant connues, il est très-facile de connoître la longueur de sa base DM: vous n'avez qu'à diviser le nombre 150, qui exprime en toises quarrées la surface du Triangle ODM, par 30, moitié de la hauteur de ce Triangle; le quotient 5 indiquera qu'il faut porter

5 toises de D. en M, & tirer la ligne OM : car alors le triangle ODM = 150 toises quarrées ; en ajoutant la valeur de ce Triangle à celle du Triangle ODE = 450 toises, le quadrilatère OMDE contiendra 600 toises quarrées ; il sera par conséquent la cinquième partie du terrein ABCDE, C. Q. F. 1°. D.

On arpentera ensuite le Triangle OMC : s'il contient 720 toises quarrées, il sera plus grand de 120 toises quarrées que la cinquième partie du terrein ABCDE ; il faudra donc retrancher du Triangle OMC le petit Triangle ORC, qui contienne 120 toises quarrées : or ce petit Triangle a pour hauteur la perpendiculaire OS que nous avons supposée = 60 toises ; ainsi (n°. 233.) divisant 120 par 30, moitié de la perpendiculaire OS, le quotient 4 exprimera la longueur que l'on doit donner à la base du Triangle ORC, dont l'aire = 120 toises quarrées, & la hauteur = 60 toises courantes : on portera donc quatre toises de C en R, où tirant la ligne OR, le Triangle OMR = 600 toises quarrées, & sera par conséquent au juste la cinquième partie du terrein ABCDE ; puisque le Triangle OMR = le Triangle OMC moins le Triangle ORC ; c'est-à-dire, 720 − 120 toises = 600 toises, C. Q. F. 2°. D.

Vous continuerez par cette méthode de chercher la cinquième partie du terrein ABCDE, en prenant sur le Triangle COB un Triangle CON, lequel ajouté au Triangle COR, donne 600 toises quarrées : vous prendrez ensuite sur le Triangle BOA le Triangle BOG, qui produise 600 toises quarrées, étant joint au Triangle BON ; & par ce moyen les trois quadrilatères ORCN, ONBG, OGAE, seront chacun la cinquième

partie du terrein A B C D E; on aura donc divisé ce terrein en autant de parties égales qu'on le demandoit, C. Q. F. D.

235. L'opération que nous venons de décrire, ne sçauroit s'éxécuter sur un terrein, qui ne permettroit pas que l'on y mesurât les Triangles que nous y avons formés: c'est pourquoi, s'il s'agissoit de faire le partage d'un bois, on en léveroit le plan (nº. 196.), sur lequel on feroit le partage dont on a besoin, & rapportant sur le contour du terrein les divisions trouvées sur le circuit du plan, on auroit tous les points qui détermineroient le partage.

OBSERVATION SUR LE PARTAGE des Terreins.

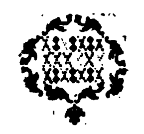
236. Avant de procéder au partage d'un terrein, on doit se rendre attentif à sa destination. Les circonstances peuvent être telles, qu'à moins d'y construire des maisons où d'y élever des édifices, l'utilité qui en peut revenir, est d'une très-petite considération.

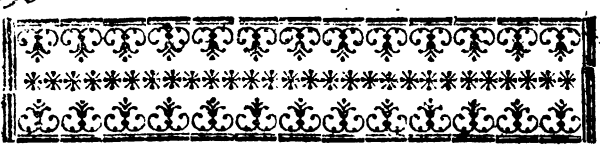
Les héritiers qui auront à partager entr'eux ces sortes de terreins, ausquels ils ont un droit égal, doivent recevoir des portions égales de leur héritage, bien entendu que l'arpentage se fera du plan horisontal ou de niveau, qui répond au terrein proposé, en cas qu'il s'y rencontre des pentes ou des inégalités qui méritent d'être considérées: par ce moyen ceux des héritiers, à qui il échoira un lot où ces inégalités seront fréquentes, auront en récompense plus de surface; autrement on leur feroit une très-grande injustice, parce que l'étendue d'un édifice ne s'estime pas à raison de la pente du terrein sur lequel il est élevé, mais à raison du plan horisontal qui répond au plan incliné, ainsi que

nous l'avons démontré très-au long (n°. 208.). J'insiste sur ce point, parce que la plûpart des Livres qui traitent de l'Arpentage, n'ont point égard à cette observation, & que j'ai vû des Arpenteurs se conduire par d'autres principes, ou plutôt se livrer à la routine d'évaluer la surface des terreins telle qu'elle se présente, sans avoir égard à l'objet de sa destination.

Si le partage que l'on veut faire, regarde des terres labourables, des prairies, des vergers, des bois; on éxaminera la nature du sol, c'est-àdire, la qualité de la terre, parce que dans un même champ il y a des parties plus fécondes ou d'un meilleur rapport les unes que les autres, ce que l'on apprendra de l'expérience de ceux qui les ont cultivées.

On fera aussi attention aux ravins qui peuvent les couper, aux inondations qui peuvent en emporter l'engrais, ou les détremper outre mesure, à la proximité des bois, d'où les bêtes fauves sont à portée de manger les plantes, ou de les endommager. Il faut même considérer les mauvais vents ausquels certaines parties sont exposées, tandis que d'autres jouissent d'un abri sûr, & bien d'autres choses ausquelles on doit avoir égard; afin que les inconvéniens soient compensés par les avantages, de manière que l'on gagne à peu près d'un côté ce que l'on perd de l'autre.





LIVRE III.

GÉOMÉTRIE DE L'ADOLESCENCE,

Où l'on traite des Rapports & des Proportions.

237. CETTE doctrine eſt plus profonde que la précédente; elle eſt néceſſaire pour entrer dans tout ce que la Géométrie a de plus élevé. On ne ſçauroit plus faire un pas dans les Mathématiques, ſans la rencontrer, ou ſans en avoir beſoin. C'eſt pourquoi j'appelle cette partie & tout ce qui en dépend, *Géométrie de l'Adoleſcence :* elle ſuppoſe que l'on ait acquis quelques forces; que de bonnes inſtitutions ayent préparé, ou, pour ainſi dire, ayent plié l'ame à réfléchir : cependant nous avons eu un ſi grand ſoin de lier cette doctrine à la précédente, que le paſſage de l'une à l'autre ne ſe fait preſque point ſentir; on doit la regarder, moins comme une nouvelle connoiſſance, que comme une connoiſſance qui ne fait que s'étendre.

Tout ce que nous avons à dire ſur les Rapports & ſur les Proportions, ſera renfermé en deux Chapitres. On verra dans le premier les Rapports & les Proportions exprimés numériquement ou algébriquement; & le ſecond traitera des Proportions des lignes, ou des lignes proportionnelles.

CHAPITRE PREMIER.

Des Rapports & des Proportions numériques & algébriques.

238. QUand nous avons parlé de la *règle de trois*, on a pû remarquer qu'elle consistoit à trouver un quatrième terme qui eût un *rapport* donné avec une quantité connue, quoiqu'alors nous ayons envisagé les grandeurs sous un autre point de vûe.

Un rapport est donc *le résultat de la comparaison que l'on fait entre deux quantités.* Ce que nous appellons un rapport, est quelquefois nommé une *raison* : or l'on peut comparer des quantités de deux manières différentes. En comparant 15 à 3, si l'on considère la différence de ces grandeurs, c'est un *rapport Arithmétique* ; mais si l'on cherche à déterminer combien de fois l'une contient l'autre, ou combien de fois l'une est contenue dans l'autre, cette espèce de comparaison est appellée *rapport Géométrique*.

239. Puisqu'un rapport Arithmétique consiste à trouver la différence qu'il y a entre deux grandeurs que l'on compare, il est évident que l'on découvre ce rapport par le moyen de la soustraction, ainsi l'équation $15 - 3 = 12$, fait voir que le rapport Arithmétique de 15 à 3 est 12.

Mais on ne sçauroit déterminer que par la division combien de fois une grandeur est contenue dans une autre; la division est donc le seul moyen de trouver un rapport Géométrique; par conséquent $\frac{15}{3} = 5$ nous montre que le rapport Géométrique de 15 à 3 est 5.

240. L'expreffion d'un rapport Arithmétique ou Géométrique peut donc fe manifefter, ou comme un rapport indiqué, ou comme un rapport trouvé; 15 − 3 n'eft pas moins le rapport Arithmétique de 15 à 3 que la quantité 12 : de même $\frac{15}{3}$ eft une expreffion du rapport Géométrique de 15 à 3, auffi-bien que le nombre 5; ainfi on pourra prendre l'une pour l'autre fuivant le befoin.

241. Dans la comparaifon de deux grandeurs, on appelle *antécédent*, la grandeur que l'on compare; & celle à qui l'on compare, eft appellée *conféquent* : fi vous comparez 15 à 3, le nombre 15 eft l'antécédent, & 3 eft le conféquent.

Tout ce que nous allons dire des rapports, doit s'entendre des rapports Géométriques. Quand il fera queftion des rapports Arithmétiques, nous en avertirons.

On dit qu'un antécédent eft *multiple* de fon conféquent, lorfque l'antécédent contient plufieurs fois éxactement fon conféquent; qui eft alors *fous-multiple* de l'antécédent. Par éxemple, 20 eft un multiple de 4, & 4 eft fous-multiple de 20. Si l'antécédent du rapport ou d'une raifon eft double, triple, quadruple, &c. de fon conféquent, on dit que le rapport, ou la raifon de l'un à l'autre, eft *double*, *triple*, &c. & qu'elle eft *fous-double*, *fous-triple*, *fous-quadruple*, quand l'antécédent n'eft que la moitié, le tiers, le quart, &c. de fon conféquent.

242. Une *raifon compofée* eft celle qui réfulte de la multiplication de deux ou de plufieurs rapports; ainfi multipliant le rapport de 2 à 3 par celui de 5 à 7, ou multipliant $\frac{2}{3}$ par $\frac{5}{7}$ (240) le produit $\frac{10}{21}$ eft une raifon compofée des deux raifons, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$; d'où l'on voit que l'antécédent d'une raifon compofée eft le produit des antécédens de toutes les raifons qui la compofent, & que fon confé-

quent est le produit de tous les conséquens.

Mais en particulier, une raison composée est dite *doublée*, *triplée*, *quadruplée* d'une autre raison, quand cette raison est composée de deux, de trois, de quatre raisons égales; ainsi le rapport $\frac{4}{9}$ est une raison doublée de la raison $\frac{2}{3}$: cela s'exprime ordinairement, en disant *que* $\frac{4}{9}$ *est en raison doublée de* $\frac{2}{3}$, parce que $\frac{4}{9}$ résulte du rapport $\frac{2}{3}$ multiplié par lui-même. Pareillement $\frac{b^3}{c^3}$ est l'expression du rapport triplé de b à la quantité c, ou de $\frac{b}{c}$, puisque $\frac{b}{c} \times \frac{b}{c} \times \frac{b}{c} = \frac{b^3}{c^3}$.

N'allez pas confondre une raison doublée ou triplée avec une raison double ou triple : car (n°. 241.) une raison est double ou triple, quand son antécédent contient deux ou trois fois son conséquent; mais une raison doublée ou triplée est celle, qui résulte d'un rapport multiplié une ou deux fois par lui-même. Le rapport de 6 à 3 est une raison double, c'est-à dire, que 6 est à 3 en raison double, parce que 6 contient deux fois 3; mais ce rapport n'est pas doublé : car il n'est pas le produit d'un rapport par lui-même. Pareillement $\frac{25}{9}$ est une raison doublée de 5 à 3 ou de $\frac{5}{3}$: car $\frac{5}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{25}{9}$; & ce n'est pas une raison double, puisque 25 ne contient pas seulement deux fois 9.

243. On juge qu'une raison est égale à une autre raison, lorsqu'en divisant chaque antécédent par son conséquent, on trouve un quotient égal de part & d'autre : ainsi le rapport de 12 à 4 est égal à celui de 15 à 5, parce que $\frac{12}{4} = 3$, aussi-bien que $\frac{15}{5}$. On doit dire la même chose du rapport de $\frac{4}{6}$ à celui de $\frac{8}{12}$: ces deux rapports sont égaux, puisque l'un & l'autre se réduit à $\frac{2}{3}$. Ainsi pour bien juger de l'égalité de deux ou de plusieurs rapports,

il faut les exprimer sous la forme d'une fraction ; & réduire ensuite ces fractions à leur plus simple expression : par-là on voit tout à coup que les rapports de 3 à 9, de 6 à 18, de 2 à 6, &c. sont des rapports égaux, parce qu'en leur donnant la forme des fractions $\frac{3}{9}$, $\frac{6}{18}$, $\frac{2}{6}$, & réduisant ces fractions à leur plus simple expression, on trouve $\frac{1}{3}$ pour chaque rapport.

On déterminera par le même moyen, lequel est le plus grand des deux rapports $\frac{6}{8}$ & $\frac{4}{12}$: car en les réduisant à leur plus simple expression $\frac{3}{4}$ & $\frac{1}{3}$, il est visible que le rapport de 6 à 8 exprimé par $\frac{3}{4}$, est plus grand que $\frac{1}{3}$, qui exprime le rapport de 4 à 12.

Quelquefois la plus simple expression de deux ou de plusieurs rapports ne montre pas tout d'un coup quel est le plus grand rapport : en ce cas, après les avoir transformés en fractions, on donnera à ces fractions une même dénomination ; & la plus grande fraction, c'est-à-dire, le plus grand numérateur de ces fractions indiquera aussi le plus grand rapport. Vous ne voyez pas d'abord que la raison de 5 à 7 soit plus petite que celle de 3 à 4. Mettez ces rapports sous la forme de fractions, exprimez-les par $\frac{5}{7}$ & $\frac{3}{4}$: donnez à ces fractions la même dénomination ; vous aurez $\frac{20}{28}$ & $\frac{21}{28}$, où $\frac{20}{28}$ est l'expression de $\frac{5}{7}$, & $\frac{21}{28}$ est celle de $\frac{3}{4}$: ainsi comme $\frac{21}{28}$ est plus grand que $\frac{20}{28}$, il est nécessaire que $\frac{5}{7}$ soit plus petit que $\frac{3}{4}$, & par conséquent que le rapport de 3 à 4 soit plus grand que celui de 5 à 7, c'est-à-dire, que 3 contient un plus grand nombre des parties de 4 que 5 n'en contient des parties de 7. Pour abbréger cette expression, on écrit $\frac{3}{4} > \frac{5}{7}$. Le signe $>$ veut dire *plus grand* ; & pour marquer *plus petit*, on tourne la pointe de l'autre sens : ainsi $\frac{5}{7} < \frac{3}{4}$ signifie que $\frac{5}{7}$ est plus petit que $\frac{3}{4}$, ou que la raison de 5 à 7 est plus petite que celle de 3 à 4.

Les nombres qui indiquent la plus ſimple expreſſion des rapports, ſont appellés les *expoſans* de ces rapports : $\frac{6}{18}$ réduit à ſa plus ſimple expreſſion, donnant $\frac{1}{3}$, les nombres 1, 3, ſont les expoſans du rapport $\frac{6}{18}$.

DES PROPORTIONS.

244. Une proportion eſt l'*égalité de deux rapports*. On l'appelle *Géométrique*, ſi elle eſt composée de rapports Géométriques, & *Arithmétique*, quand ce ſont des rapports Arithmétiques qui la forment. Il n'eſt queſtion pour le préſent que des proportions Géométriques.

Puiſqu'une proportion Géométrique eſt une égalité de rapports Géométriques, cette proportion peut s'exprimer par une équation : ainſi le rapport de 2 à 6 étant égal à celui 3 à 9, on peut écrire $\frac{2}{6} = \frac{3}{9}$; mais on l'exprime plus ſouvent de cette manière, 2 . 6 : : 3 . 9 : ce qui veut dire, 2 eſt à 6 comme 3 eſt à 9; où l'on voit qu'un point entre deux termes ſignifie *eſt à*, & que les quatre points en quarré ſignifient *comme*.

Puiſqu'une proportion eſt compoſée de deux rapports qui ont chacun un antécédent, une proportion renferme deux antécédents & deux conſéquents. Dans l'éxemple propoſé, 2 eſt le premier antécédent, & 3 eſt le ſecond; 6 eſt le premier conſéquent, & 9 eſt le ſecond conſéquent. Les deux termes 2, 9, qui ſont aux extrémités de la proportion, s'appellent enſemble les *Extrêmes* de la proportion, & les deux termes 6, 3, qui ſont dans le milieu, ſont appellés *Moyens*.

On dit qu'une proportion eſt *continuë*, quand les moyens ſont les mêmes, ou ſont des quantités égales; ainſi 8 . 4 : : 4 . 2, eſt une proportion continue : on exprime cette proportion par le ſigne

$\div\!\!\div$ que l'on met au-devant des termes de la proportion continuë. On écrit donc $\div\!\!\div$ 8 . 4 . 2 ; ce qui signifie la même chose que 8 . 4 :: 4 . 2. La grandeur 4 qui se trouve dans le milieu, est appellée *Moyenne proportionnelle* entre 8 & 2. Une proportion continuë peut avoir plus de trois termes : rien n'empêche qu'elle ne s'étende à l'infini ; dans ce cas elle prend le nom de *progression* : ainsi 8 . 4 :: 4 . 2 :: 2 . 1 :: 1 . $\frac{1}{2}$, &c. est une progression Géométrique, qui s'exprime plus simplement par $\div\!\!\div$ 8 . 4 . 2. 1 . $\frac{1}{2}$, en mettant le signe $\div\!\!\div$ au commencement de tous les termes, que l'on écrit à la suite les uns des autres, en les séparant par un point.

Théorème (a) fondamental & unique, dont on déduit toute la Théorie des proportions.

245. Dans une proportion Géométrique, le produit des extrêmes est toujours égal au produit des moyens.

DÉMONSTRATION.

Prenez la proportion numérique 3 . 9 :: 2 . 6 ; il est évident que $3 \times 6 = 9 \times 2$: car l'on a 18 de part & d'autre ; mais pourquoi cela ? Faites attention que 3 n'est que le tiers de 9 ; ainsi multipliant 3 par 6, vous ne devez avoir que le tiers de 9 qui seroit multiplié par 6 : or, au lieu de multiplier 9 par 6, vous ne le multipliez que par le tiers de 6, ou par 2 ; le produit de 9 par 2 n'est donc que le tiers du produit de 9 par 6 : ce produit est par conséquent égal à celui de 3 par 6, qui est aussi le tiers de 9×6 ; il est donc clair pourquoi dans ce

(a) *Théorème*, c'est une Proposition où il s'agit de démontrer une vérité découverte.

cas particulier le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens. Mais cela ne ſuffit pas ; il le faut démontrer généralement. Les quantités algébriques étant des grandeurs indéterminées, ce que l'on démontre par leur moyen, eſt démontré dans tous les cas imaginables.

Soit donc $a . b :: c . d$, l'expreſſion d'une proportion Géométrique quelconque. Il faut démontrer que le produit des extrêmes $ad = bc$, le produit des moyens.

Puiſqu'une proportion eſt l'égalité de deux rapports, on aura $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$: or deux grandeurs égales multipliées par une même grandeur donnent des produits égaux ; multiplions donc l'un & l'autre membre de cette équation par le produit bd des dénominateurs : nous aurons $\frac{abd}{b} = \frac{bcd}{d}$ ou, en effaçant ce qui ſe détruit, $ad = bc$, C. Q. F. D.

Ce n'eſt pas ſans une bonne raiſon que je multiplie les deux membres de l'équation $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, par le produit bd des conſéquents ou des dénominateurs ; c'eſt que l'on ne peut faire évanouir des fractions, qu'en multipliant par les quantités qui ſervent de diviſeurs ; & comme je ſçais par la concluſion du Théorème, qu'il faut que j'arrive à cette équation $ad = bc$, qui eſt totalement délivrée de fractions, on voit pourquoi, ayant transformé la proportion en cette égalité $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, j'en multiplie l'un & l'autre membre par le produit bd des dénominateurs.

246. Réciproquement, ſi le produit de deux grandeurs quelconques eſt égal au produit de deux autres grandeurs, on pourra toujours former une proportion de ces quatre grandeurs.

DÉMONSTRATION.

Prenons l'équation $3 \times 8 = 6 \times 4$. On voit que l'on en peut former la proportion $3 . 6 :: 4 . 8$; ce qui n'est qu'une démonstration particulière : elle deviendra générale, en faisant voir qu'ayant $b c = d s$, on en peut déduire $b . d :: s . c$, ou $\frac{b}{d} = \frac{s}{c}$.

Par la supposition, $b c = d s$; donc $\frac{b c}{c d} = \frac{d s}{c d}$: car des grandeurs égales, divisées par une même grandeur, donnent des quotients égaux ; ainsi ôtant ce qui se détruit de l'équation $\frac{b c}{c d} = \frac{d s}{d c}$, elle devient $\frac{b}{d} = \frac{s}{c}$, ou $b . d :: s . c$, C. Q. F. D.

On peut & on doit demander ce qui me détermine à diviser par $c d$ les deux membres de l'équation $b c = d s$. C'est la conclusion du Théorème qui me guide : de ce que $b c = d s$, je dois trouver $\frac{b}{d} = \frac{s}{c}$; c'est-à-dire, que c doit s'évanouir du premier membre, & d en devenir le diviseur : or c'est ce qui arrive en divisant par $d c$.

Ces remarques méritent que l'on y fasse attention ; c'est en quoi consiste l'esprit de l'Analyse.

Le Théorème que nous venons de démontrer avec sa converse, est d'un avantage merveilleux pour la formation des équations : car dès que vous aurez une proportion, vous en pourrez faire une équation, & réciproquement une équation vous servira à construire des proportions ; c'est pourquo comme les termes d'une proportion peuvent se combiner entr'eux & avec d'autres grandeurs de bien des manières, vous discernerez toujours les cas, où il y aura proportion, & ceux où la proportion n'aura plus lieu.

COROLLAIRE I.

247. Si l'on connoît trois termes d'une proportion Géométrique, $a . b :: c . x$, le terme inconnu x sera toujours facile à connoître : on fera $ax = bc$; donc $x = \frac{bc}{a}$: c'est-à-dire, que pour connoître la quatrième proportionnelle à trois grandeurs, il faut multiplier la seconde par la troisième, & diviser le produit par la première; le quotient de cette division sera la quatrième proportionnelle.

Généralement, en quelqu'endroit de la proportion que l'inconnue se trouve, on la déterminera toujours, en divisant le produit où elle se trouve par la grandeur qui multiplie cette inconnue : supposez que $c . y :: d . b$, vous aurez $dy = bc$; donc $y = \frac{bc}{d}$.

On a fait un grand usage de cette propriété pour démontrer la Règle de trois. 5 hommes, dit-on, font en un jour 50 toises d'un ouvrage; combien 12 hommes en feront-ils à proportion ? Soit appellée x la quantité cherchée : il est clair que les effets doivent être proportionnés à leur cause; ainsi la question proposée se réduit à cette proportion, $5 . 50 :: 12 . x$; donc $\frac{50 \times 12}{5} = x = \frac{10 \times 5 \times 12}{5} = 10 \times 12 = 120$. Par conséquent 12 hommes feroient 120 toises par jour, en supposant que 5 en fissent 50.

En employant la converse du Théorème fondamental, de quelque manière que la Règle de trois soit proposée, elle ne cause aucun embarras. Par exemple, 50 hommes enfermés dans un Château doivent consommer pendant 30 jours une certaine quantité de vivres; en combien de jours 70 hommes feront-ils la même consommation ? Il est cer-

tain que l'on ne peut pas disposer, comme il faut, les termes de cette question, en écrivant : 50 hommes . 30 jours :: 70 hommes . x : cela signifieroit, puisque 50 hommes emploient 30 jours, 70 hommes emploieront plus de 30 jours ; ce qui est très-faux. Car 70 hommes auront plutôt consommé une même quantité de vivres que 50 hommes.

Pour éviter l'embarras de la disposition des termes, faites une équation : appellez p la quantité des vivres, & x le nombre de jours cherché ; dites donc : 50 hommes en 30 jours, c'est 30 fois 50 Rations, qui égalent p en consommation ; ainsi $30 \times 50 = p$, ou $1500 = p$.

De même 70 fois le nombre de jours cherché, est aussi égal à p, puisqu'il doit y avoir même consommation de part & d'autre ; on a donc cette autre équation $70 \times x = p$: or deux grandeurs égales à une troisième, sont égales entr'elles ; donc $1500 = 70 \times x$. Ainsi $x = \frac{1500}{70}$, ou $\frac{150}{7} = 21 + \frac{3}{7}$; c'est-à-dire, que 70 hommes feront en 21 jours & $\frac{3}{7}$ de jour la même consommation, que feroient 50 hommes en 30 jours.

L'équation, $30 \times 50 = 70 \times x$, fait voir la disposition suivant laquelle les termes doivent être rangés, si on veut les ordonner en proportion : car (no. 246.) 50 . 70 :: x . 30. Ainsi comme 50 est plus petit que 70, le nombre x des jours que l'on cherche, doit aussi être plus petit que 30. En effet, 70 hommes doivent employer moins de tems que 50 à faire une même consommation de vivres : c'est pourquoi les Arithméticiens appellent ordinairement cette proportion une *proportion inverse*, parce que dans la proportion directe le nombre des jours est proportionné à celui des hommes ; & dans l'inverse il y a d'autant moins

de jours, qu'il y a plus d'hommes. Quand on a reconnu par le bon sens qu'une proportion est inverse, si on veut en ordonner les termes, on mettra le troisième terme à la quatrième place, & le terme inconnu x à la troisième.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur cette Règle, parce que nous l'avons démontrée d'une manière plus naturelle, lorsque nous avons expliqué la Règle de trois dans notre Traité d'Arithmétique.

COROLLAIRE II.

248. Dans la proportion continuë, le produit des extrêmes est égal au quarré de la moyenne. Soit la proportion continuë $\div 2 . 4 . 8$; c'est un fait que $2 \times 8 = 4 \times 4$. Mais en général, si l'on a la proportion continuë $a . b :: b . x$, on en déduira que $ax = bb$, puisqu'une proportion Géométrique donne toujours le produit des extrêmes égal à celui des moyens.

PROBLÊME.

249. Trouver une moyenne proportionnelle entre les deux grandeurs a, b.

RÉSOLUTION.

Soit la moyenne proportionnelle inconnue appellée y. On aura cette proportion $a . y :: y . b$.

Donc $ab = yy$. Ainsi $y = \sqrt{ab}$, c'est-à-dire, que la racine quarrée du produit des deux grandeurs données, est la moyenne proportionnelle cherchée; ce qui n'est pas toujours possible en nombres: on chercheroit inutilement une moyenne proportionnelle exacte entre 3 & 7; car $3 \times 7 = 21$, & la racine quarrée de 21 n'est pas déterminable à la rigueur: on peut seulement en approcher à l'infini.

COROLLAIRE III.

250. Vous avez beau changer la place des termes d'une proportion $a . b :: c . d$, la proportion subsistera, pourvû que les deux mêmes termes qui sont extrêmes, soient toujours ou moyens ou extrêmes. Je dis donc, qu'ayant la proportion

$$a . b :: c . d$$
ou $2 . 4 :: 3 . 6$

on ne détruira point la proportion en faisant les changemens suivans.

1°. En renversant	$b . a :: d . c$
	$4 . 2 :: 6 . 3$
2°. En alternant	$a . c :: b . d$
	$2 . 3 :: 4 . 6$
3°. . .	$d . c :: b . a$
	$6 . 3 :: 4 . 2$
4°. . .	$d . b :: c . a$
	$6 . 4 :: 3 . 2$
5°. . .	$c . a :: d . b$
	$3 . 2 :: 6 . 4$
6°. . .	$c . d :: a . b$
	$3 . 6 :: 2 . 4$
7°. . .	$b . d :: a . c$
	$4 . 6 :: 2 . 3$

DÉMONSTRATION.

Il est certain qu'il y aura une proportion dans tous ces cas, si le produit des extrêmes est toujours égal au produit des moyens (n°. 246.) or pour peu que l'on ouvre les yeux sur tous ces changemens, on apperçoit que ce sont toujours les mêmes grandeurs qui se multiplient ; donc puisque dans le premier cas le produit des extrême est égal au

produit des moyens, à cause que l'on suppose une proportion, il arrivera la même chose dans tous les autres cas; il y aura donc proportion. Ce qu'il falloit démontrer.

Si l'on a bien compris que le produit des extrêmes est toujours égal au produit des moyens, & que l'on peut toujours former une proportion dès que l'on a le produit de deux quantités égal au produit de deux autres quantités, il n'y a point de Commençant, qui ne puisse déterminer dans quelles circonstances quatre grandeurs proportionnelles resteront en proportion, soit que l'on ajoute, que l'on retranche, que l'on multiplie, que l'on divise, que l'on élève à des dégrés, ou que l'on extraye les racines des grandeurs qui sont en proportion; puisqu'en prouvant l'égalité du produit des extrêmes avec celui des moyens, on aura un caractère infaillible de l'éxistence de la proportion, comme on va le voir.

COROLLAIRE IV.

251. Dans une proportion Géométrique $a . b :: c . d$, ajoutez aux antécédents, ou retranchez-en ce que vous voudrez, pourvû que les grandeurs ajoutées ou retranchées soient en même rapport que les antécédents, il y aura toujours proportion; dites la même chose des conséquents. Mais plus simplement: si ce que l'on ajoute ou que l'on retranche, n'empêche pas que le produit des extrêmes ne soit égal à celui des moyens, la proportion subsistera; ainsi vous pouvez faire les additions ou les soustractions suivantes, sans détruire la proportion.

Soit la proportion $\begin{matrix} a . b :: c . d \\ 12 . 3 :: 4 . 2. \end{matrix}$

Donc en *composant*, ou plutôt en ajoutant,

$$a + b \,.\, b :: c + d \,.\, d$$
$$15 \,.\, 3 :: 10 \,.\, 2$$
$$a + b \,.\, a :: c + d \,.\, c$$
$$15 \,.\, 12 :: 10 \,.\, 8$$
$$a + c \,.\, c :: b + d \,.\, d$$
$$20 \,.\, 8 :: 5 \,.\, 2$$
$$a + c \,.\, a :: b + d \,.\, b$$
$$20 \,.\, 12 :: 5 \,.\, 3$$

Car prenez laquelle vous voudrez de ces différentes dispositions, par éxemple, $a + c \,.\, a :: b + d \,.\, b$: faites le produit des extrêmes, qui est $ab + bc$, & celui des moyens $ab + ad$; il y a égalité entre ces deux produits, c'est-à-dire, que $ab + bc = ab + ad$: il est évident, 1° que $ab = ab$; 2°. que $bc = ad$, puisque la proportion donnée $a \,.\, b :: c \,.\, d$ produit $bc = ad$. Donc $ab + bc = ab + ad$. Ainsi le produit des extrêmes étant égal à celui des moyens, c'est une nécessité qu'il y ait proportion.

De même, supposez que $a \,.\, b :: c \,.\, d$, vous aurez en *soustrayant*,

$$a - b \,.\, b :: c - d \,.\, d$$
$$a - b \,.\, a :: c - d \,.\, c$$
$$b - a \,.\, a :: d - c \,.\, c$$
$$b - a \,.\, b :: d - c \,.\, d$$
$$a - c \,.\, c :: b - d \,.\, d$$
$$a - c \,.\, a :: b - d \,.\, b$$
$$c - a \,.\, a :: d - b \,.\, b$$
$$c - a \,.\, c :: d - b \,.\, d$$

Vous n'avez qu'à prendre une de ces dispositions, telle que $a - b \,.\, b :: c - d \,.\, d$; vous trouverez toujours que le produit des extrêmes $ad - bd = bc - bd$ le produit des moyens: car premièrement $- bd = - bd$. En second lieu, $ad = bc$,

puisque

puisque l'hypothèse est $a . b :: c . d$; ainsi $ad = bc$. Donc $ad - bd = bc - bd$.

Il n'y a rien au monde de si aisé que ces démonstrations, quand on en tient le principe; c'est pourquoi on ne doit pas s'effrayer de cette multitude de changemens, dont les termes d'une proportion sont susceptibles : il n'est pas même nécessaire que l'on se rompe la tête à les retenir toutes; il suffit que l'on acquière l'habitude de les trouver au besoin : d'ailleurs, en substituant des nombres à la place des lettres, on voit tout d'un coup s'il y a proportion ou non.

COROLLAIRE V.

252. Si l'on multiplie ou si l'on divise les antécédents d'une proportion par une même grandeur m, la proportion subsistera : on ne la détruira pas non plus en multipliant ou en divisant ses conséquents par une même grandeur s.

Soit donc $a . b :: c . d$. Je dis que

1°. $am . b :: cm . d$

2°. $\frac{a}{m} . b :: \frac{c}{m} . d$

3°. $a . bs :: c . ds$

4°. $a . \frac{b}{s} :: c . \frac{d}{s}$

DÉMONSTRATION.

On n'a qu'à faire le produit des extrêmes, & voir s'il est égal à celui des moyens.

Par la supposition $a . b :: c . d$. Donc $ad = bc$; donc $adm = bcm$: c'est ce que l'on tire du premier cas. Donc $\frac{ad}{m} = \frac{bc}{m}$: c'est le produit du second cas. Donc $ads = bcs$: résultat du troi-

sième cas. Donc $\frac{ad}{s} = \frac{bc}{s}$: c'est ce que l'on déduit du quatrième cas ; par conséquent le cinquième Corollaire est démontré en toutes ses parties.

COROLLAIRE VI.

253. Soient les deux Proportions,

$$a \,.\, b :: c \,.\, d$$
$$f \,.\, g :: m \,.\, s$$

Je dis qu'en multipliant ou en divisant par ordre chaque antécédent par chaque antécédent, & chaque conséquent par chaque conséquent correspondant, il y aura encore proportion, c'est-à-dire, que $af \,.\, bg :: cm \,.\, ds$, ou que $\frac{a}{f} \,.\, \frac{b}{g} :: \frac{c}{m} \,.\, \frac{d}{s}$.

DÉMONSTRATION.

Cela sera vrai, si l'on démontre dans les deux cas, que le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. Il faut donc prouver, 1°. que $adfs = bcgm$; 2°. que $\frac{ad}{fs} = \frac{bc}{gm}$.

Par la supposition $a \,.\, b :: c \,.\, d$. Donc $ad = bc$.

On a aussi (supp.) $f \,.\, g :: m \,.\, s$. Donc $fs = gm$. Par conséquent $ad \times fs = bc \times gm$, ou $\frac{ad}{fs} = \frac{bc}{gm}$; parce que des grandeurs égales, multipliées ou divisées par des grandeurs égales, restent toujours égales ; C. Q. F. D.

Quand il y auroit plus de deux proportions, le Corollaire seroit toujours vrai.

254. On voit par-là que les quarrés, les cubes, les quatrièmes puissances, &c. des termes proportionnels sont aussi en proportion, c'est-à-dire, qu'ayant $a \,.\, b :: c \,.\, d$, on aura $a^2 \,.\, b^2 :: c^2 \,.\, d^2$, ou $a^3 \,.\, b^3 :: c^3 \,.\, d^3$; puisque la proportion $a^2 \,.\, b^2$

$:: c^2 . d^2$, peut venir des deux proportions égales
$a . b :: c . d$
$a . b :: c . d$ multipliées par ordre, & cette multiplication donneroit $a^2 . b^2 :: c^2 . d^2$; mais on peut démontrer indépendamment du Corollaire précédent, que $a^2 . b^2 :: c^2 . d^2$, ou que $a^3 . b^3 :: c^3 . d^3$, en supposant la proportion $a . b :: c . d$: car on en tire $a d = b c$. Donc $a^2 d^2 = b^2 c^2$, en quarrant l'un & l'autre membre; par conséquent $a^2 . b^2 :: c^2 . d^2$.

De même en élevant au cube les deux membres de l'équation $a d = b c$, on aura $a^3 d^3 = b^3 c^3$, ou $a^3 \times d^3 = b^3 \times c^3$; donc $a^3 . b^3 :: c^3 . d^3$; C. Q. F. D.

Il est évident par la même raison, que des grandeurs en proportion ont aussi leurs racines de même dégré en proportion, c'est-à-dire, que si $a^3 . b^3 :: c^3 . d^3$, on en pourra déduire la proportion $a . b :: c . d$. Car (supp.) $a^3 d^3 = b^3 c^3$; donc, extrayant la racine cubique de l'un & de l'autre membre, on trouve $a d = b c$, ou $a . b :: c . d$.

Nous ferons usage de ces vérités, lorsque nous traiterons des lignes proportionnelles; ainsi, quoique leur démonstration soit extrêmement facile, on doit les considérer autant qu'il est nécessaire, pour se les graver dans la mémoire.

COROLLAIRE VII.

255. Deux proportions $a . b :: b . d$, & $f . g :: m . s$; dont les rapports de l'une sont égaux aux rapports de l'autre, donneront encore une proportion, si l'on ajoûte par ordre les antécédents aux antécédents, & les conséquents aux conséquents, ou si l'on retranche ces mêmes grandeurs par ordre. Soient

$f . g :: m . s ::$
$12 . 4 :: 18 . 6;$

donc les deux proportions : $a . b :: c . d ::$
$9 . 3 :: 6 . 2$

Je dis que l'on peut en déduire, en ajoutant par ordre :

1°. La proportion $a + f . b + g :: c + m . d + s.$
$21 . 7 :: 24 . 8.$

2°. En soustrayant aussi par ordre, on en tirera cètte autre proportion $f - a . g - b :: m - c . s - d$
$3 . 1 :: 12 . 4.$

DÉMONSTRATION.

Cela est évident par les proportions exprimées numériquement; mais on le démontrera généralement, en faisant voir que le produit des extrêmes est égal à celui des moyens. Prenons d'abord la proportion $a + f . b + g :: c + m . d + s$ supposée, & montrons qu'elle est réelle. On fera le produit des extrêmes & celui des moyens. Il y aura d'une part $ad + as + fd + fs$, & de l'autre. $bc + bm + cg + gm$; il faut donc prouver que $ad + as + fd + fs = bc + bm + cg + gm$; mais on a par la supposition $f . g :: m . s :: a . b :: c . d$;

Donc
$$ad = bc$$
$$as = bm$$
$$fd = cg$$
$$fs = gm$$

Donc $ad + as + fd + fs = bc + bm + cg + gm.$

Le produit des extrêmes est donc égal à celui des moyens; & par conséquent il y a proportion.

La seconde partie se prouvera comme la pre-

mière ; mais remarquez bien, qu'afin que l'on puisse ajouter ou soustraire par ordre les termes de deux proportions sans détruire la proportion, il est nécessaire que les rapports dont l'une est composée, soient égaux aux rapports de l'autre. Car en prenant les deux proportions $2 . 4 :: 3 . 6$, $5 . 15 :: 4 . 12$ qui ne sont pas composées de rapports égaux, si l'on ajoutoit par ordre leurs antécédents & leurs conséquents, il n'en résulteroit pas une nouvelle proportion; puisque les quatre termes $2 + 5$, $4 + 15$, $3 + 4$, $6 + 12$, ne sont pas proportionnels, c'est-à-dire, que 7 n'est pas à 19, comme 7 est à 18.

COROLLAIRE VIII.

256. Dans une proportion continuë $\div a . b . c$, le quarré du premier terme est au quarré du second, comme le premier est au troisième, c'est-à-dire, $a^2 . b^2 :: a . c$.

DÉMONSTRATION.

Par la supposition $a . b :: b . c$. Donc $ac = b^2$; ainsi multipliant l'un & l'autre membre de cette équation par la même grandeur a, on aura $a^2 c = a b^2$, ou $a^2 \times c = b^2 \times a$; d'où l'on tire $a^2 . b^2 :: a . c$; C. Q. F. D.

COROLLAIRE IX.

257. Si la proportion continuë a quatre termes, & que l'on ait $\div a . b . c . d$, je dis que le cube de la première est au cube de la seconde, comme la première est à la quatrième, c'est-à-dire que $a^3 . b^3 :: a . d$.

DÉMONSTRATION.

1°. De ce que $a . b :: b . c$, on déduit (n°. 256.) $a^2 . b^2 :: a . c$, ou $a^2 c = a b^2$. 2°. Puisque $a . b :: b . c :: c . d$; donc $a . b :: c . d$: ainsi $a d = b c$. Multipliant les membres de la première équation par ceux de la seconde, le premier membre par le premier membre, & le second par le second, il en résultera l'équation $a^3 c d = a b^3 c$, dont l'un & l'autre membre divisé par c, produit $a^3 d = a b^3$, ou $a^3 \times d = b^3 \times a$; donc $a^3 . b^3 :: a . d$, (n°. 246.) C. Q. F. D.

Généralement, quel que soit le nombre des quantités qui sont en proportion continuë, en donnant pour Exposans aux deux premiers termes de la proportion ce même nombre diminué de l'unité, les deux premiers termes ainsi affectés seront entr'eux comme le premier est au dernier. S'il y a, par exemple, neuf quantités en proportion continuë, dont la première soit a, la seconde b, & la dernière r, on aura $a^8 . b^8 :: a . r$. S'il y en avoit 17, on diroit $a^{16} . b^{16} :: a . r$, &c. On fera usage de cette observation.

COROLLAIRE X.

258. Lorsque l'on a une suite de raisons égales, telle que $a . b :: c . d :: f . g :: m . n$, &c. la somme des antécédents est à la somme des conséquents, comme un antécédent quelconque est à son conséquent. Il s'agit donc de prouver que $a + c + f + m . b + d + g + n :: a . b$.

DÉMONSTRATION.

En faisant voir que le produit des extrêmes est

égal à celui des moyens ; on aura démontré qu'il y a proportion. Le produit des extrêmes est $ab + bc + bf + bm$; & celui des moyens est $ab + ad + ag + an$. Il s'agit donc de prouver que $ab + bc + bf + bm = ab + ad + ag + an$.

1°. $ab = ab$.

2°. $bc = ad$; puisque (supp.) $a . b :: c . d$.

3°. $bf = ag$: car (supp.) $a . b :: f . g$.

4°. $bm = an$; parce que (supp.) $a . b :: m . n$.

Donc $ab + bc + bf + bm = ab + ad + ag + an$; C. Q. F. D.

Exprimez en nombres une suite de raisons égales ; prenez la suite $2 . 6 :: 3 . 9 :: 1 . 3 :: 4 . 12$, &c. & vous verrez sur le champ que la somme des antécédents $2 + 3 + 1 + 4$, ou 10, est à la somme des conséquents $6 + 9 + 3 + 12$, ou 30, comme 2 est à 6, c'est-à-dire, que $10 . 30 :: 2 . 6$; ce qui saute aux yeux.

Nous ne pousserons pas plus loin nos recherches sur les différens changemens que peuvent recevoir les termes d'une proportion, sans cesser d'être proportionnels ; un plus grand détail appartient à un Traité complet de calcul : nous n'avons dû considérer ici les proportions que relativement à la Géométrie qui va suivre. Cependant on fait en certaines rencontres un si grand usage des progressions Arithmétiques comparées aux progressions Géométriques, que nous ne devons pas laisser ignorer aux Commençans l'avantage que l'on retire de cette comparaison.

De la Proportion Arithmétique.

259. On appelle proportion Arithmétique l'égalité de deux rapports Arithmétiques. Cette pro-

portion se marque à peu-près comme une proportion Géométrique ; toute la différence est que l'on ne met que deux points entre les deux rapports de la proportion Arithmétique : ainsi 5 . 2 : 10 . 7, est l'expression d'une proportion Arithmétique ; cela signifie que 5 surpasse 2, comme 10 surpasse 7. Or on trouve l'excès d'une grandeur sur une autre, en ôtant la plus petite de la plus grande ; on pourra par conséquent exprimer les deux rapports d'une proportion Arithmétique par une soustraction indiquée. La proportion Arithmétique 5 . 2 : 10 . 7, pourra donc recevoir la forme d'une équation, & par conséquent devenir $5 - 2 = 10 - 7$, ou généralement, si $a . b$: arithmétiquement comme $c . d$, on écrira $a . b : c . d$, ou $a - b = c - d$.

THÉORÈME II.

260. Dans une proportion Arithmétique

$$a . b : c . d$$
$$12 . 9 : 18 . 15$$

la somme des extrêmes $a + d$, est toujours égale à la somme des moyens $b + c$.

DÉMONSTRATION.

Prenez la proportion Arithmétique 12 . 9 : 18 . 15. Il est évident que $12 + 15$ somme des extrêmes, est égale à $9 + 18$, qui est la somme des moyens.

Mais en général il faut prouver que, si l'on a la proportion Arithmétique $a . b : c . d$, il en résultera $a + d = b + c$. Or c'est ce qui arrive : car (supp.) $a - b = c - d$; donc, en transposant b & d avec des signes contraires, on trouve a

$+ d = b + c$, c'eſt à-dire, que la ſomme des extrêmes eſt égale à la ſomme des moyens.

Réciproquement, ſi $a + d = b + c$, je dis que $a . b$ arithmétiquement : $c . d$: car, puiſque $a + d = b + c$, on aura, en tranſpoſant, $a - b = c - d$, ou $a . b : c . d$.

PROBLÊME.

261. Trois termes, 5, 9, 14, d'une proportion Arithmétique étant donnés, trouver le quatrième que j'appelle x.

RÉSOLUTION.

Dites : $5 . 9 : 14 . x$; donc $5 + x = 14 + 9 = 23$ (n°. 260.) : ainſi $x = 23 - 5 = 18$. Effectivement 5 eſt ſurpaſſé par 9, comme 14 l'eſt par 18. Et généralement, ayant la proportion $a . b : c . x$, on aura $a + x = b + c$. Donc $x = b + c - a$; c'eſt-à-dire, que l'on trouve un quatrième proportionnel Arithmétique, en ſouſtrayant le premier terme de la ſomme des moyens.

COROLLAIRE.

262. Dans une proportion continuë Arithmétique $a . b : b . c$, la ſomme des extrêmes eſt
7 . 12 : 12 . 17
égale au double de la moyenne.

DÉMONSTRATION.

Il faut prouver que $a + c = 2b$. Or, puiſque la proportion eſt Arithmétique, la ſomme des extrêmes eſt égale à la ſomme des moyens (n°. 260.) ; donc $a + c = b + b$ ou $2b$; C. Q. F. D.

Mais cela est encore plus sensible dans la proportion continuë Arithmétique 7 . 12 : 12 . 17 : car 7 + 17 = 12 + 12, ou = 24 double de 12, moyen proportionnel.

PROBLÊME.

263. Trouver un moyen proportionnel Arithmétique entre 13 & 8.

RÉSOLUTION.

Faites $13 . x : x . 8$. Donc $2x = 21$; par conséquent $x = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}$, le moyen proportionnel cherché. En effet $13 . 10\frac{1}{2} : 10\frac{1}{2} . 8$; car la somme des extrêmes $13 + 8$, ou $21 = 10\frac{1}{2} + 10\frac{1}{2}$, c'est-à dire 21.

Et généralement, pour trouver un moyen proportionnel Arithmétique x entre a & b, on fera $a . x : x . b$. Donc $a + b = 2x$: ainsi $x = \frac{a+b}{2}$. C'est-à-dire, que la moyenne proportionnelle Arithmétique entre deux grandeurs est égale à la moitié de la somme des extrêmes.

DES LOGARITHMES.

264. Comme une progression Géométrique est une suite de rapports Géométriques égaux, une progression Arithmétique est aussi une suite de rapports Arithmétiques égaux que l'on exprime ainsi ÷ 2 . 4 . 6 . 8 . 10, &c. ce qui signifie que 2 est à 4 arithmétiquement, comme 4 est à 6, comme 6 est à 8, &c. En formant une progression Géométrique, on s'est apperçu qu'il en naissoit une progression Arithmétique. Avec les deux termes 1, b, faites une progression Géométrique ; vous

aurez $1 . b :: b . \frac{bb}{1}$; ainsi b^2 sera le troisiéme terme de votre progression : continuez en disant $b . b^2 :: b^2 . \frac{b^4}{b} = b^3$; par conséquent b^3 sera le quatrième terme de la progression. Vous trouverez de même que b^4 en seroit le cinquième, b^5 le sixième, & ainsi de suite à l'infini ; par conséquent la progression Géométrique, dont les deux premiers termes sont $1, b$, sera $\div\div 1 . b^1 : b^2 . b^3 . b^4 . b^5 , b^6$; &c. en augmentant toujours d'un dégré : où il est aisé de remarquer que, tandis que les termes de cette suite sont en progression Géométrique, les Exposans de ces termes forment la progression Arithmétique $\div 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6$: or l'on a appellé *Logarithmes*, les termes d'une progression Arithmétique, qui répondent à ceux d'une progression Géométrique. Comme dans la progression $\div\div 1 . b^1 . b^2 . b^3$, &c. l'unité n'a point de terme Arithmétique correspondant, on lui supposera 0, afin que chaque terme de la progression Géométrique réponde à son Logarithme ; on écrira donc les deux progressions l'une sous l'autre de cette manière :

$$\div\div 1 . b^1 . b^2 . b^3 . b^4 . b^5 . b^6 . \&c.$$
$$\div 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 .$$

Voici les observations que l'on a faites sur ces deux progressions ainsi comparées.

1°. Le Logarithme d'un produit est toujours égal à la somme des Logarithmes des quantités qui ont concouru à former ce produit. Prenez b^5, qui est le produit de b^2 par b^3. Les Logarithmes de b^2 & b^3 sont 2 & 3, dont la somme est 5, qui vaut réellement le Logarithme 5 du produit b^5.

2°. Le Logarithme du quotient de deux grandeurs divisées l'une par l'autre, est égal à la diffé-

rence des Logarithmes de ces grandeurs. Divisez b^6 par b^4 : vous aurez le quotient b^2, dont le Logarithme est 2 ; & ce Logarithme 2 est égal à la différence 6 — 4 des Logarithmes des grandeurs b^6, b^4.

3°. Le Logarithme d'une grandeur n'est que la moitié du Logarithme de son quarré : c'est une suite de ce que nous avons dit ; mais prenez la grandeur b^3, quarrez-la ; elle sera b^6 : or 3 Logarithme de b^3, n'est que la moitié de 6 Logarithme de b^6.

4°. Le Logarithme d'un nombre n'est que le tiers du Logarithme de son cube. Car b^6 est le cube de b^2, le Logarithme de b^6 est 6, & celui de b^2 est 2, qui n'est que le tiers du Logarithme 6.

265. On voit bien que cela est, me dira-t-on ; le fait est amplement prouvé : l'important est de sçavoir comme cela arrive.

Pour le démontrer, prenons deux progressions numériques $\because 1 . 2 . 4 . 8 . 16 . 32 . 64 . 128.$
$\div 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7.$
où l'on voit que le Logarithme de 1 est 0, celui de 2 est 1, celui de 4 est 2, celui de 32 est 5, &c. Dans la Démonstration suivante, un nombre précédé de la lettre l, sera l'expression du Logarithme de ce nombre. Ainsi $l\,3$ signifiera le Logarithme de 3 ; $\overline{l\,8 \times 4}$, ou $l\,32$, signifiera le Logarithme de 32, &c.

Cela supposé, il s'agit de démontrer que le Logarithme d'un produit tel que 4×8, est égal à la somme des Logarithmes des racines 4, 8 ; c'est-à-dire, que $\overline{l\,4 \times 8} = l\,4 + l\,8$.

DÉMONSTRATION.

Puisque $4 \times 8 = 32 \times 1$, on aura la pro-

portion Géométrique $1 . 4 :: 8 . 32$, dont les Logarithmes doivent former une proportion Arithmétique ; ainsi $l1 . l4 : l8 . l32$. Mais (260.) dans une proportion Arithmétique la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens ; donc $l1 + l32 = l4 + l8$. Or (supp.) $l1 = 0$; donc $l32 = l4 + l8 = l\overline{4 \times 8}$; c'est-à-dire, que le Logarithme du produit de 4 par 8 est égal à la somme des Logarithmes des racines 4, 8 de ce produit. Ce qu'il falloit démontrer.

On prouvera de même que le Logarithme du quotient 16 des deux nombres 64 & 4, est égal à la différence qu'il y a entre les Logarithmes de ces nombres ; c'est-à-dire, que $l16 = l64 - l4$. Car, par la supposition, $\frac{64}{4} = 16$. Donc (en multipliant par 4) $64 \times 1 = 16 \times 4$; ainsi $1 . 4 :: 16 . 64$; & par conséquent $l1 . l4 : l16 . l64$; donc (n° 260.) $l1 + l64 = l4 + l16$. Or (supp.) $l1 = 0$; par conséquent $l64 = l4 + l16$. Donc enfin $l64 - l4 = l16$.

Il ne sera pas plus difficile de prouver que le Logarithme d'un nombre n'est que la moitié du Logarithme de son quarré. Prenez 8, quarrez-le, vous aurez 64; il faut donc prouver que $l8 = \frac{l64}{2}$.

DÉMONSTRATION.

Par la supposition, $8 \times 8 = 64 \times 1$. Donc $1 . 8 :: 8 . 64$. Ainsi $l1 . l8 :: l8 . l64$. Donc (n°. 260.) $l1 + l64 = l8 + l8 = 2l8$. Or $l1 = 0$. Donc $l64 = 2l8$. Et par conséquent, en divisant l'un & l'autre membre par 2, on aura $\frac{l64}{2} = l8$; C. Q. F. D.

On déduira facilement de cette dernière Démon-

ſtration, que le Logarithme d'un nombre n'eſt que le tiers du Logarithme de ſon cube. Prenez le nombre 2, & faites ſon cube 8; je dis que $l2 = \frac{l8}{3}$.

DÉMONSTRATION.

Puiſque (ſupp.) $4 \times 2 = 8 \times 1$, on aura $1 . 4 :: 2 . 8$. Donc $l1 . l4 :: l2 . l8$. Or (par la démonſtration précédente) 4 étant le quarré de 2, $l4 = 2l2$; donc $l1 . 2l2 :: l2 . l8$; par conſéquent $l1 + l8 = 2l2 + l2 = 3l2$; & comme (ſupp.) $l1 = 0$, on aura $l8 = 3l2$; donc enfin $\frac{l8}{3} = l2$; C. Q. F D.

266. Les propriétés que nous venons de démontrer, ont ſervi de fondement à la conſtruction des tables des Logarithmes, moyennant leſquelles on fait par l'Addition & par la Souſtraction les opérations que l'on ſeroit obligé, ſans leur ſecours, d'éxécuter avec la Multiplication, la Diviſion & l'Extraction des Racines, comme je vais le faire voir en peu de mots, parce que j'y reviendrai lorſqu'il ſera queſtion de la Trigonométrie-Pratique par les Sinus.

Reprenons les deux progreſſions,

$$\div\div 1 . 2 . 4 . 8 . 16 . 32 . 64 . 128.$$
$$\div 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7.$$

Voulez-vous multiplier 4 par 16? cherchez les Logarithmes, 2, 4, qui répondent à ces nombres: faites-en la ſomme 6; elle eſt le Logarithme de leur produit (265.): cherchez donc dans la Table le nombre qui répond au Logarithme 6; vous trouverez 64, qui eſt effectivement le produit de 4 par 16.

S'il s'agiſſoit de diviſer 128 par 8, on chercheroit les Logarithmes 7, 3, de ces nombres: on

ôteroit 3 de 7; le reste 4 seroit le Logarithme de leur quotient, auquel répond le nombre 16.

Cherche-t-on la racine quarrée de 64? on n'a qu'à prendre la moitié de son Logarithme 6, c'est 3, auquel répond 8; ainsi 8 est la racine quarrée de 64.

Il n'y a pas plus d'embarras à trouver la Racine cubique de 64: prenez le tiers de son Logarithme 6; vous aurez 2, auquel répond 4. Ainsi 4 est la Racine cubique de 64. On feroit donc avec une extrême facilité les opérations les plus laborieuses du calcul, si l'on avoit les Logarithmes d'une grande quantité de nombres; & c'est à quoi l'on a tâché de parvenir dans la construction des Tables des Logarithmes.

Afin que l'on se familiarise avec les proportions, nous allons résoudre quelques Problêmes, dont la résolution éxige cette connoissance.

PROBLÊME.

267. Entre deux grandeurs données a, b, trouver deux moyennes proportionnelles x, y.

RÉSOLUTION.

Par la condition du Problême on doit avoir $a . x :: x . y :: y . b$. D'où l'on tire ces deux équations, $xx = ay$, & $xy = ab$. Par la seconde équation on trouve $y = \frac{ab}{x}$. Substituant cette valeur de y dans la premiére équation, on aura $xx = \frac{aab}{x}$ ou $x^3 = aab$, en multipliant l'un & l'autre membre par x : enfin tirant la Racine cubique de part & d'autre, il vient $x = \sqrt[3]{aab}$, où la pre-

mière x des deux moyennes proportionnelles est égale à une grandeur connue, puisqu'il ne s'agit plus que d'extraire la Racine cubique de la quantité aab, que l'on suppose donnée par la nature de la question ; faisant donc $\sqrt[3]{aab} = c$: afin de calculer avec plus de facilité, je substitue c à la place de x dans la progression $a.x::x.y::y.b$, & elle se change en cette autre $a.c::c.y::y.b$, où il ne s'agit plus que de trouver une moyenne proportionnelle entre c & b ; ce qui ne souffre aucune difficulté après la découverte de la première, puisque $a.c::c.\frac{cc}{a}::\frac{cc}{a}.b$, où l'on voit que $\frac{cc}{a}$ est la seconde moyenne proportionnelle ; parce que quand on a trois termes d'une proportion, on doit multiplier le second par le troisième, en diviser le produit par le premier, & le quotient de cette division est le quatrième proportionnel (n°. 247.)

On pourroit trouver la première x des moyennes proportionnelles x, y, sans faire deux équations : il n'y a qu'à se rappeller, que dans une proportion continuë de quatre termes, le cube de la première est au cube de la seconde, comme la première est à la quatrième (257.) ; on aura donc $a^3 . x^3 :: a . b$, d'où l'on déduit $a^3 b = a x^3$, & divisant par a, l'équation devient $a^2 b = x^3$; par conséquent $x = \sqrt[3]{a^2 b}$, comme ci-dessus.

Comme on fait usage de ce Problême en Géométrie, il n'est pas hors de propos de le résoudre numériquement. On demande deux moyennes proportionnelles entre 3 & 24. Prenez la formule

mule $x = \sqrt[3]{a^2 b}$, qui eſt l'expreſſion de la première moyenne proportionnelle entre a & b. Cette expreſſion nous avertit qu'il faut extraire la Racine cubique du quarré a^2 du premier terme a multiplié par le quatrième b. Par conſéquent élevons 3 à ſon quarré 9; multiplions ce quarré par 24 : le produit ſera 216, dont la Racine cubique 6 eſt la première des deux moyennes proportionnelles entre 3 & 24; après cela la ſeconde eſt aiſée à trouver : car 3 . 6 : : 6 . 12 : : 12 . 24; ainſi 6 & 12 ſont les deux moyennes proportionnelles cherchées.

Si vous ne voulez pas vous ſervir de la formule $x = \sqrt[3]{a^2 b}$, dites : (nº. 257.) le cube de 3 eſt au cube de x comme le premier terme 3 eſt au quatrième 24. Donc $27 . x^3 :: 3 . 24$, ou $3 . 24 :: 27 . x^3$; ainſi $x^3 = \frac{24 \times 27}{3} = 8 \times 27 = 216$. Donc $x = \sqrt[3]{216} = 6$, ainſi que nous l'avons trouvé par la formule.

268. Il y a quelques Règles de Changes étrangers aſſez difficiles, mais dont la Réſolution devient fort aiſée avec le ſecours des Proportions.

PROBLÊME.

Si 100 liv. de Veniſe pèſent 70 liv. de Lyon,
Et 120 liv. de Lyon . . 100 liv. de Rouen,
Et 80 liv. de Rouen . . 100 liv. de Toulouſe;
Et 100 liv. de Toulouſe. 74 liv. de Genève,
Combien 100 liv. de Veniſe font-elles de livres peſant de Genève ?

RÉSOLUTION.

Soit la livre pesant de Venise $= V$.
Celle de Lyon L
Celle de Rouen . . . . R
Celle de Toulouse . . . . T
Et celle de Genève . . . . G

Par les conditions du Problême vous aurez les équations suivantes : $100 V = 70 L$. $120 L = 100 R$. $80 R = 100 T$. $100 T = 74 G$; d'où vous déduirez ces quatre Proportions :

$$V . L :: 70 . 100.$$
$$L . R :: 100 . 120.$$
$$R . T :: 100 . 80.$$
$$T . G :: 74 . 100.$$

Donc en multipliant par ordre tous les antécédents par les antécédents, & les conséquents par les conséquents, (n°. 253.) vous aurez cette unique proportion, $V \times L \times R \times T . L \times R \times T \times G :: 70 \times 100 \times 100 \times 74 . 100 \times 120 \times 80 \times 100$; d'où l'on tire l'équation suivante :

$$\frac{V \times L \times R \times T}{L \times R \times T \times G} = \frac{70 \times 100 \times 100 \times 74}{100 \times 120 \times 80 \times 100}$$

qui se réduit à $\frac{V}{G} = \frac{70 \times 74}{120 \times 80}$, en effaçant ce qui se détruit ; ou encore $\frac{V}{G} = \frac{7 \times 74}{12 \times 80} = \frac{7 \times 37}{6 \times 80} = \frac{259}{480}$. Ainsi $V . G :: 259 . 480$; ce qui signifie que la livre pesant de Venise est à la livre pesant de Genève, comme 259 est à 480 ; ou que la livre pesant de Venise n'est que les $\frac{259}{480}$ parties de la livre pesant de Genève. Faites maintenant ce raisonnement : si une livre de Venise est réduite à $\frac{259}{480}$ de la livre de Genève, à combien

100 liv. de Venise seront-elles réduites? Vous aurez donc cette proportion, $1 . \frac{259}{480} :: 100 . x$, ou $480 . 259 :: 100 . x$ (en multipliant les deux premiers termes par 480 pour faire évanouir la fraction) (n°. 252.); ainsi $\frac{259 \times 100}{480} = x = \frac{259 \times 10}{48} = \frac{259 \times 5}{24} = 53$ liv. $+ \frac{23}{24}$, c'est-à-dire, que 100 liv. de Venise ne valent pas tout-à-fait 54 liv. de Genève; il s'en faut $\frac{1}{24}$.

J'ai détaillé la Résolution de ce Problême, afin que l'on ait un modèle bien raisonné, appliquable à toutes les questions semblables.

PROBLÊME

Semblable au précédent.

1 écu de France vaut	80.	den. de Hol.
415. den. de Hollande	240.	den. d'Anglet.
240. den. d'Angleterre	420.	den. de Hamb.
64. den. de Hambourg	1.	florin de Francf.

Combien 166 écus de France valent-ils de florins de Francfort?

RÉSOLUTION.

Appellons la monnoie de France	F
Celle de Hollande	H
Celle d'Angleterre	A
Celle de Hambourg	h
Celle de Francfort	f

On aura par les conditions du Problême:

$$F . H :: 80 . 1$$
$$H . A :: 240 . 415$$
$$A . h :: 420 . 240$$
$$h . f :: 1 . 64$$

Donc en multipliant par ordre, on aura l'équation $\frac{F\times H\times A\times h}{H\times A\times h\times f} = \frac{80\times 240\times 420}{415\times 240\times 64}$ ou $\frac{F}{f} = \frac{80\times 420}{415\times 64} = \frac{8\times 10\times 105\times 4}{415\times 8\times 4\times 2} = \frac{1050}{830} = \frac{105}{83}$. Ainsi F . f : : 105 . 83; c'est-à-dire, que l'écu de France est au florin de Francfort, comme 105 est à 83; par conséquent 83 écus de France valent 105 florins de Francfort. Dites présentement: si 83 écus de France valent 105 florins de Francfort, combien 166 écus de France vaudront-ils de florins de Francfort? Cela donne cette proportion 83 . 105 : : 166 . *x*: en divisant le produit des moyens 105×166 par le premier terme 83, on trouvera $x = 210$; c'est-à-dire, que 166 écus de France valent 210 florins de Francfort.

De ce que F . f : : 105 . 83, j'ai conclu que 83 écus de France valoient 105 florins de Francfort; en voici la preuve. Faites le produit des extrêmes & celui des moyens; vous aurez $F\times 83 = 105\times f$, ou $F = \frac{105 f}{83}$, ce qui signifie que 1 écu de France vaut $\frac{105}{83}$ de florins de Francfort; donc 83 fois un écu de France = 83 fois $\frac{105}{83}$ de Francfort, c'est-à-dire, que 83 écus de France = 105 florins de Francfort, C. Q. F. D. (*a*)

Quand on a résolu un Problême, il est facile de donner les règles de sa Résolution; il n'y a qu'à

(*a*) Remarquez qu'il n'est pas besoin d'ajouter une Démonstration à la Résolution des Problêmes que nous proposons ici. Chaque partie de la Résolution se démontrant à mesure qu'elle avance, il est clair qu'il n'y a plus rien à démontrer, quand on est arrivé à une solution entière: c'est pour cela que la méthode des Mathématiciens est si propre à étendre l'intelligence; il faut qu'elle soit continuellement en exercice, par l'obligation où est l'esprit à chaque pas qu'il fait, de se rendre compte de ses démarches.

revenir sur ce que l'on a fait pour le résoudre, développer la règle contenuë dans le dernier résultat & l'énoncer.

Si les Inventeurs de certaines Règles d'Arithmétique nous disoient le chemin qu'ils ont tenu lorsqu'ils les ont découvertes, ils délivreroient les Lecteurs, qui font usage de leur raison, de l'embarras où ils sont très-souvent de concevoir comment on a pû découvrir des Règles quelquefois très compliquées, ausquelles l'état de la question ne paroît point devoir conduire. L'Algèbre ou l'Analyse révèle tous ces mystères; elle montre tous les dégrés par où l'on a passé, & que les Inventeurs ont supprimés, pour ne produire que le dernier résultat d'où ils ont déduit la Règle, comme je le ferai voir particuliérement, en examinant la Résolution du Problême suivant, qui n'est pas moins utile que curieux.

Une pièce d'Artillerie, telle qu'un canon qui n'est plus en état de servir, ne laisse pas d'être de quelque utilité. La matière en est bonne à refondre; on peut en faire de nouvelles pièces. Celles, dont il est ici question, sont composées de *Rosette*, appellée communément *Cuivre rouge*, & *d'Étain* fin d'Angleterre. De l'alliage de ces deux métaux il en résulte un métal que l'on appelle *Fonte*. On conçoit bien que les métaux qui composent la fonte, doivent avoir entr'eux une certaine proportion. Chaque fondeur a la sienne; mais ceux qui se sont rendus les plus attentifs à l'expérience, suivent la proportion de 100 à 12, c'est-à-dire, que sur 100 livres de rosette, ils mettent 12 livres d'étain; & l'on trouve que le métal qui en résulte, n'est ni trop aigre ni trop doux: une autre proportion le rend ou trop cassant ou trop mou.

Ainsi, comme l'on peut ignorer, quand on

fond des pièces d'artillerie, la proportion dont on a fait usage dans leur première fonte, il s'agit de la découvrir.

L'expérience prouve qu'un corps plongé dans l'eau perd quelque chose de sa pesanteur (*a*). Les Physiciens ont déterminé la quantité de cette perte; elle varie, suivant la différente pesanteur des corps, sous un même volume, c'est-à-dire, de même grosseur : on a observé que *la rosette perd dans l'eau la neuvième partie de son poids, & que l'etain fin en perd la septième partie.* Nous allons faire usage de ce principe, pour déterminer la quantité de rosette, & celle d'étain, qui composent la fonte dont la proportion de l'alliage est inconnuë.

PROBLÊME.

269. Un morceau de fonte, ou bien un tron-

(*a*) *L'expérience prouve qu'un corps plongé dans l'eau perd quelque chose de sa pesanteur.* Il est certain que les parties supérieures de l'eau sont soutenues par les inférieures, & que celles-ci le sont par le fond du vaisseau qui les contient, puisque ces parties de l'eau posent immédiatement les unes sur les autres.

Ainsi quand on plonge dans l'eau un corps solide, ce corps chasse l'eau, il prend la place d'un volume d'eau égal au sien : or ce volume d'eau chassé étoit soutenu par les parties qui l'avoisinoient ; donc le corps solide, qui en prend la place, sera aussi soutenu par les mêmes parties : ce solide, que je suppose plus pesant qu'un pareil volume d'eau, étant soutenu, pesera donc moins qu'il ne pesoit lorsqu'il n'étoit pas soutenu, ainsi que l'expérience nous l'apprend.

Je dis plus. La perte de la pesanteur du corps solide plongé dans l'eau, doit être précisément égale au poids du volume d'eau dont le solide occupe la place : car supposons que le volume d'eau, dont le solide occupe la place, pése une livre ; les parties d'eau qui l'avoisinoient, soutenoient donc une livre pesant, ou, ce qui est la même chose, faisoient l'effort d'une livre contre ce volume d'eau, & l'empêchoient de descendre. Par conséquent le solide mis en la place du volume d'eau, souffrira le même effort de la part des mêmes parties qui l'environnent : cet effort est d'une livre ; le corps solide trouve donc la résistance d'une livre à vaincre en descendant dans l'eau, & par conséquent il est nécessaire qu'il perde une livre de sa pesanteur, puisqu'on lui résiste en sens contraire avec une livre.

La perte que fait un solide plongé dans l'eau, est donc égale au poids du volume d'eau dont ce solide occupe la place ; d'où l'on voit que l'on peut connoître le poids d'un volume d'eau quelconque, sans qu'il soit besoin de peser l'eau immédiatement.

çon d'une pièce d'artillerie étant donné ; trouver la quantité de rosette & d'étain, qui en fait l'alliage.

RÉSOLUTION.

Pesez bien éxactement dans l'air le tronçon proposé. Supposons que son poids soit de 80 livres, vous le peserez ensuite dans l'eau, c'est à-dire, qu'en le pesant il sera plongé dans l'eau, tandis que le poids qui fera équilibre avec lui, sera en l'air; remarquez combien il perd de sa pesanteur. Qu'il en perde, par éxemple, 9 livres & $\frac{1}{3} = \frac{28}{3}$.

Après ces observations, appellez R la quantité de rosette qui est dans le tronçon. Nommez aussi E la quantité d'étain qui est entré dans la composition de ce même morceau, & reprenez l'état de la question, c'est-à-dire, rappellez-vous les conditions du Problême. La première est que le tronçon pèse 80 livres en plein air; les deux portions de rosette & d'étain dont il est composé, pesent donc ensemble 80 livres : ainsi l'on a cette équation $R + E = 80$.

La seconde condition consiste en ce que les deux quantités de rosette & d'étain, réunies en une seule masse, perdent dans l'eau $\frac{28}{3}$ de leur pesanteur totale. Or, par le principe d'expérience des métaux pesés dans l'eau, la rosette perd la neuvième partie de son poids; sa perte est donc $\frac{R}{9}$; & l'étain en perd la septième partie : ainsi on doit exprimer sa perte par $\frac{E}{7}$. Ces deux pertes ensemble valent la perte totale $\frac{28}{3}$ de la masse entière; par conséquent il vient cette autre équation, $\frac{R}{9} + \frac{E}{7} = \frac{28}{3}$; & toutes les conditions du Problême sont exprimées.

Tâchons présentement de dégager les grandeurs inconnues R, E, afin de les rendre égales à des

quantités connuës. Commençons par faire évanouir les fractions de l'équation $\frac{R}{9} + \frac{E}{7} = \frac{28}{3}$, en multipliant l'un & l'autre membre par 9×7, ce qui produira $7R + 9E = \frac{9 \times 7 \times 28}{3} = \frac{3 \times 3 \times 7 \times 28}{3} = 3 \times 7 \times 28 = 21 \times 28 = 588$: ainsi $7R + 9E = 588$.

Et si nous revenons à la première équation $R + E = 80$, en transposant E, nous aurons $R = 80 - E$; donc $7 \times R = 7 \times \overline{80 - E}$; c'est-à dire, $7R = 560 - 7E$. En la place de $7R$ mettons sa valeur $560 - 7E$ dans l'équation $7R + 9E = 588$, il nous viendra $560 - 7E + 9E = 588$, ou $560 + 2E = 588$; & en transposant 560, cette équation deviendra $2E = 588 - 560 = 28$: or, puisque $2E = 28$, on aura donc $E = 14$; c'est à-dire, qu'il y a 14 livres d'étain dans le tronçon proposé, & par conséquent 66 livres de rosette, puisque ces deux quantités sont ensemble 80 livres : c'est la première condition du Problême; & que la septième partie de $14 = 2$, jointe à la neuvième partie de $66 = 7 + \frac{3}{9}$ ou $\frac{1}{3}$, produit 9 livres & $\frac{1}{3}$, qui est la perte totale du tronçon, suivant la seconde condition du Ploblême.

Sur 66 livres de rosette, il y a donc 14 livres d'étain dans le morceau de fonte proposé ; c'est beaucoup trop, puisqu'il ne faut que 12 livres d'étain sur 100 livres de rosette. Par conséquent, afin que cet alliage devienne conforme aux expériences les plus reçûes, on y ajoutera la quantité de rosette nécessaire pour qu'elle ait avec l'étain la proportion de 100 à 12. Ainsi l'on fera ce raisonnement : *Puisque 12 livres d'étain exigent 100 livres de rosette, combien 14 livres d'étain demandent - elles de*

rosette? Cette question se résoud par une Règle de Trois, qui donne 116 livres & $\frac{2}{3}$ de rosette pour 14 livres d'étain : il y a déja dans la fonte en question 66 livres de rosette ; c'est par conséquent 50 livres & $\frac{2}{3}$ de rosette qu'il faut y ajouter, afin que la rosette & l'étain, qui composent cette fonte, soient dans la proportion la plus reçûe.

Mais ce Problême n'est résolu que pour un cas particulier. Rendons la résolution générale. Soit la pesanteur de la fonte proposée $= f$, sa perte dans l'eau $= p$. Soit aussi $= x$ la quantité inconnuë de rosette qui en compose l'alliage, b la perte d'une quantité de rosette égale en pesanteur au morceau de fonte. Appellons aussi y la quantité inconnuë d'étain, c la perte d'une quantité d'étain égale en pesanteur au morceau de fonte.

1°. Puisque les deux quantités inconnuës de rosette & d'étain, mises ensemble, composent le morceau de fonte, on aura cette équation, $x + y = f$.

2°. Pour trouver l'expression de la perte de chaque quantité inconnuë, supposons d'abord un morceau de pure rosette égal en pesanteur au tronçon de fonte ; la perte de la quantité inconnue de rosette doit être proportionnée à la perte d'un morceau de pure rosette égal en pesanteur au tronçon de fonte : ainsi l'on a cette proportion ; le morceau de pure rosette égal en pesanteur au tronçon de fonte est à sa perte b dans l'eau, comme la quantité inconnuë x de rosette est aussi à sa perte dans l'eau, ou plus simplement $f . b :: x . \frac{bx}{f}$, qui est l'expression de la perte que fait dans l'eau la quantité inconnuë de rosette.

En suivant cette même méthode, c'est-à-dire, en considérant un morceau de pur étain égal en pesanteur au tronçon de fonte, on fera cette au-

tre proportion : le morceau de pur étain égal en pesanteur au tronçon de fonte f, est à sa perte c dans l'eau, comme la quantité inconnuë y d'étain est à sa perte dans l'eau, ou $f . c :: y . \frac{cy}{f}$; où l'on voit que $\frac{cy}{f}$ est l'expression de la perte que fait dans l'eau la quantité inconnuë d'étain : or les deux pertes des deux quantités inconnuës sont égales à la perte totale p; par conséquent on a encore cette autre équation, $\frac{bx}{f} + \frac{cy}{f} = p$, & le Problême est mis en équation : il ne reste plus qu'à dégager les inconnuës.

Reprenons la première équation, $x + y = f$; donc, en transposant, $x = f - y$; &, en faisant évanouir les fractions de l'équation, $\frac{bx}{f} + \frac{cy}{f} = p$, nous aurons $bx + cy = fp$; donc, en substituant dans cette dernière équation en la place de x sa valeur $f - y$, on aura $bf - by + cy = fp$; ainsi, en transposant, $cy - by = fp - bf$, ou $\overline{c - b} \times y = \overline{p - b} \times f$; d'où l'on tire cette proportion, $c - b : p - b :: f . y$; cela signifie que l'on aura la quantité d'étain qui est dans la fonte, en cherchant une quatrième proportionnelle aux trois termes connus $c - b$, $p - b$, f.

Car c est la perte que fait dans l'eau une masse d'étain égale en pesanteur au tronçon de fonte $= 80$ livres; & l'on sçait par l'expérience que l'étain perd dans l'eau la septième partie de son poids : ainsi sa perte $c = \frac{80}{7}$. Par le même principe d'expérience, la perte b d'une masse de rosette pesant 80 liv. est la neuvième partie de son poids ; d'où il suit que $b = \frac{80}{9}$: de plus (par la supp.) la perte p du tronçon de fonte est $\frac{28}{3}$ de livre ; ainsi $p = \frac{28}{3}$, & le poids de la fonte $f = 80$ livres. Si l'on substitue donc en la place des lettres c, b, p, f, leur

valeur correspondante $\frac{80}{7}$, $\frac{80}{9}$, $\frac{28}{3}$, 80, dans la proportion $c - b \,.\, p - b :: f \,.\, y$, elle se changera en celle-ci, $\frac{80}{7} - \frac{80}{9} \,.\, \frac{28}{3} - \frac{80}{9} :: 80 \,.\, y$, où les trois premiers termes sont exprimés en chiffres : il n'y a donc qu'à multiplier les deux termes moyens $\frac{28}{3} - \frac{80}{9}$, 80, l'un par l'autre, & diviser le produit $\frac{320}{9}$ par le premier terme $\frac{80}{7} - \frac{80}{9}$ $= \frac{160}{7 \times 9}$ (en donnant à ces deux fractions la même dénomination) & l'on aura $\frac{320}{9} \times \frac{7 \times 9}{160}$ $= \frac{32 \times 10 \times 7 \times 9}{9 \times 16 \times 10} = \frac{32 \times 7}{16} = \frac{2 \times 16 \times 7}{16} = 2 \times 7$ $= 14$, comme ci-dessus, pour la quantité d'étain y dont est composé le morceau de fonte.

Si nous n'avions pas voulu voir les dégrés qui nous ont conduits à la résolution de ce Problême, voici la règle que nous aurions pû donner, afin que l'on trouve dans tous les cas possibles la quantité d'étain ou de rosette, qui composent l'alliage du tronçon proposé. Pour déterminer, par exemple, la quantité d'étain, faites cette Règle de Trois : *La perte que fait dans l'eau une masse d'étain égale en pesanteur au tronçon de fonte, moins la perte que fait dans l'eau une masse de rosette égale aussi en pesanteur au tronçon de fonte, est à la perte que fait dans l'eau le tronçon de fonte, moins la perte que fait dans l'eau la masse de rosette égale en pesanteur au tronçon de fonte, comme la pesanteur du tronçon de fonte est à un quatrième terme qui donnera la quantité d'étain cherchée :* car c'est ce que signifie la dernière proportion, $c - b \,.\, p - b :: f \,.\, y$, où nous sommes parvenus en dernier ressort, en comparant par ordre les différens rapports des quantités données (a).

(a) Ce Problême est célebre sous le nom de *La Couronne de Hiéron*. L'occasion qui l'a fait naître, mérite d'être rapportée. Hiéron, Roi de Syracuse, ordonna à un Orfèvre de lui faire une Couronne d'or. Le

N'oublions pas d'obſerver que l'on ne pourroit réſoudre ce Problême que par une ſorte de hazard,

Prince fournit la quantité de matière qui devoit y entrer. Mais Hiéron, fort content de l'ouvrage, le fut très-peu de l'ouvrier, dont la probité ne lui parut pas ſans reproche. Quoique, expérience faite, la Couronne fût trouvée poids pour poids de l'or qui avoit été fourni, il ſoupçonna l'alliage d'un métal étranger.

Cependant, en cas que l'Orfèvre eût falſifié la matière, il n'étoit pas aiſé de l'en convaincre; le Roi ne vouloit pas que l'on détruisît la Couronne, elle étoit de ſon goût. La queſtion fit du bruit. On la propoſa à tous les Mathématiciens de ce tems-là; elle ſe réduiſoit *à déterminer, ſans endommager en rien l'ouvrage de la Couronne, la quantité de matière différente de l'or que l'on auroit pû y mêler.*

Archimède, parent & ami de Hiéron, dut être un des premiers qui en eût connoiſſance; mais on ne ſçauroit guères douter que les Géomètres de Syracuſe, & même tous ceux de la Grèce, n'ayent travaillé de toutes leurs forces à la Réſolution d'un Problême ſi ſingulier. Une queſtion auſſi nouvelle & auſſi difficile devoit être un appas pour cette eſpèce d'hommes, qui ne ſont amoureux que des difficultés.

Néanmoins il eſt vraiſemblable que la Réſolution de ce Problême ſe fit attendre aſſez long-tems. Il n'en parut qu'une ſeule, & même depuis environ deux mille ans, on n'en a point vû d'autre; elle étoit d'Archimède. Apparemment cette queſtion l'avoit extrêmement tourmenté; elle le pourſuivoit partout; ce fut au bain que les principes de ſa réſolution, ou, comme s'expriment les Géomètres, les données de ce Problême ſe préſenterent à ſon eſprit. Il s'apperçût qu'étant dans l'eau, ſon corps perdoit de ſon poids; réfléchiſſant tout-à-coup ſur cette idée, il entrevit la réſolution de ſon Problême. L'imagination allumée, & comme tranſporté de l'eſprit de ſa découverte, il ſe jette hors du bain, court tout nud par les rues de Syracuſe en criant, *je l'ai trouvé*, & ſe rend chez lui pour mettre ſur le papier les idées qui l'agitoient, ou pour s'aſſurer de la vérité de ſes préſomptions, qui ſe trouvèrent effectivement conformes à ce qu'il en eſpéroit.

Voici donc comment Archimède s'y prit, pour prouver que la matière de la Couronne avoit été altérée. Il prit une maſſe d'or pur, égale en peſanteur à celle de la Couronne; ces deux maſſes étant peſées en plein air, il les peſa dans l'eau, où elles ne conſervèrent plus d'équilibre: d'où il conclut d'abord, ſelon le principe d'expérience rapporté ci-deſſus, que la matière de la Couronne étoit falſifiée.

Mais, pour en venir à une ſolution parfaite, c'eſt-à-dire, pour déterminer la quantité de matière étrangère que l'Orfèvre avoit pû mêler avec l'or, s'étant douté que ce pouvoit n'être que de l'argent, il prit encore une maſſe de pur argent de même poids que la Couronne; & comparant enſemble les pertes que faiſoient dans l'eau ces trois différentes matières de même poids, il parvint à découvrir, comme nous avons fait, la quantité de l'argent mêlé avec l'or; ce qui fut confirmé par l'aveu de l'Orfèvre, aveu, dont on n'avoit pourtant pas abſolument beſoin, ſi ce n'eſt pour atteſter qu'il n'y avoit d'autre alliage que de l'argent: car, en ſuppoſant que l'on eût mêlé avec l'or deux autres métaux, comme de l'argent & du cuivre, le Problême auroit été indéterminé, ainſi que nous le démontrons à l'article qui ſuit la réſolution générale que nous avons donnée du Problême auquel appartient cette Note.

si l'on ignoroit l'espèce & le nombre des métaux.

On voit par-là qu'Archimède étoit en possession de se démêler des questions les plus épineuses des Mathématiques. Le Problème de *la Couronne d'Hiéron* étoit très-difficile : il fallut qu'Archimède se créât, pour ainsi dire, des données. Sa résolution ne dépend point d'une méthode nouvelle, d'une Géométrie, d'un calcul particulier inventés par d'autres & connus d'un petit nombre de Géomètres : elle est purement de génie.

De la manière dont le Problème fut proposé par Hiéron, il n'y avoit de donnée que le poids de la Couronne. Archimède eut à découvrir, 1°. Que les métaux perdoient de leur poids dans l'eau. 2°. Qu'ils en perdoient selon la différente pesanteur des métaux sous le même volume. 3°. Il fallut qu'il s'avisât de comparer les pertes de deux masses, l'une d'or pur, & l'autre de l'argent pur de même poids que la Couronne. Tout cela étoit entièrement neuf de son tems. Les Géomètres ses Contemporains en sont une preuve évidente : ils ne produisirent rien d'approchant de sa découverte sur ce sujet ; il fut le seul, & deux mille ans qui se sont écoulés depuis, ne lui ont pas donné un seul concurrent.

Je ne sçais si les loix de l'hidrostatique, c'est-à-dire, de la science qui enseigne le rapport de la pesanteur des différens fluides, & leur action contre les corps solides qui y sont plongés, je ne sçais pas, dis-je, si les loix de cette science étoient découvertes avant Archimède ; mais il est sûr qu'il nous en a donné tout le fonds dans son Traité *De insidentibus humido* ; & peut-être est-ce à la Résolution du Problême proposé par Hiéron que nous en sommes redevables. Si ce Traité eût éxisté, il me semble que la question du Roi de Syracuse ne l'eût pas tant embarrassé ; Archimède y eût trouvé la plus grande partie des données de son Problême.

Ceux qui disent que l'on résout aujourd'hui d'un trait de plume ce qui lui a tant coûté, comme le Problême de l'*Analyse des métaux*, me permettront de leur faire considérer, que l'on ne résout point véritablement ce qui est résolu depuis deux mille ans ; qu'Archimède est le seul qui ait résolu ce Problême, & que c'est se faire une illusion bien étrange que de prétendre donner une résolution, quand on ne fait que la copier ou l'expliquer.

Je ne sçaurois donc approuver l'espèce de raillerie qu'un bel esprit à faite à ce sujet : *Les Géomètres d'aujourd'hui ne sont pas*, dit-il, *aisés à contenter sur les difficultés*, & *ce qui a fait sortir Archimède du bain pour crier par les rues de Syracuse*, JE L'AI TROUVÉ, *ne seroit pas pour eux une découverte bien glorieuse*. Avec tout le respect dû au célèbre Panégyriste des Modernes, elle seroit très glorieuse, même aujourd'hui ; c'est qu'elle est totalement indépendante des nouvelles méthodes : l'application de l'Algèbre à la Géométrie, le calcul différentiel & intégral n'y serviroient de rien ; sans un coup de génie on n'en viendroit pas à bout, & ces coups sont rares : le nombre des génies, qui ne doivent rien aux autres, est fort petit. Presque tous nos Modernes ont établi leur réputation, en faisant usage de découvertes qui ne leur appartenoient pas ; mais Archimède a élevé la sienne sur des fondemens dont il a été l'Inventeur. Une nouvelle méthode dans les sciences est comme une nouvelle machine dans les arts : elle procure plus de commodités ; mais suppose-t-elle absolument plus de génie, ou plus de force réelle à ceux qui en font usage ?

qui composent un alliage dont il s'agit de faire l'analyse. L'Orfèvre, dont nous avons parlé dans la note (*a*), auroit très-certainement mis en défaut le Roi & le Géomètre de Syracuse, en composant son alliage de trois ou quatre métaux; puisque, 1°. Il auroit fallu qu'Archimède eût deviné l'espèce des métaux, afin d'en comparer les différentes pertes dans l'eau. 2°. Qu'il en eût imaginé le nombre; & même tout cela supposé, il ne lui auroit pas été possible de déterminer absolument la quantité précise de chaque matière: car, en reprenant notre Problême, supposons que le morceau de fonte soit composé de rosette, d'étain, & de fer $= F$, qui perd dans l'eau la huitième partie de son poids; ces trois métaux réunis pèsent 80 liv. (par la supp.): ainsi $R + E + F = 80$. Secondement, leur perte totale étant $\frac{28}{3}$, on aura cette autre équation, $\frac{R}{9} + \frac{E}{7} + \frac{F}{8} = \frac{28}{3}$; & ces deux équations expriment toutes les conditions du Problême.

Si l'on fait maintenant évanouir les fractions de la seconde équation, elle deviendra $56 R + 72 E + 63 F = 4704$; & de l'équation $R + E + F = 80$, on tire $R = 80 - E - F$; & multipliant l'un & l'autre membre de cette équation par 56, l'on a $56 R = 4480 - 56 E - 56 F$. Substituons présentement la valeur de $56 R$ dans l'équation $56 R + 72 E + 63 F = 4704$, elle deviendra $4480 - 56 E - 56 F + 72 E + 63 F = 4704$, d'où l'on a, en effaçant ce qui se détruit, $4480 + 16 E + 7 F = 4704$; & transposant 4480, l'équation devient $16 E + 7 F = 224$, où il y a encore les deux inconnuës E, F, que l'on ne sçauroit faire évanouir, parce qu'il n'y a rien dans la question qui détermine le rapport d'E à F ou à R, ni de F à R.

Le Problême est donc indéterminé, c'est-à-dire, qu'il peut avoir différentes solutions.

Car supposons qu'il y ait 4 livres de fer dans le morceau de fonte proposé, on aura $F = 4$. Donc $7F = 28$. Ainsi l'équation $16E + 7F = 224$, deviendra $16E + 28 = 224$; donc $16E = 224 - 28 = 196$. Ainsi $E = \frac{196}{16} = 12\frac{1}{4}$; ce qui signifie que dans ce cas il y a 12 livres & un quart d'étain, & par conséquent 63 livres & $\frac{3}{4}$ de rosette, puisque ces trois quantités réunies donnent 80 livres, & que la huitième partie de 4 livres, plus la neuvième partie de 63 livres & $\frac{3}{4}$, avec la septième partie de 12 livres $\frac{1}{4}$, produisent 9 livres & $\frac{1}{3}$ ou $\frac{28}{3}$, qui est la perte totale que font dans l'eau ces trois masses fondues en une seule.

Si l'on fait une autre supposition, on pourra trouver encore une autre solution. Soit la quantité de fer $F = 3$; donc $7F = 21$: alors l'équation $16E + 7F = 224$, se changera en celle-ci, $16E + 21 = 224$. Donc $16E = 224 - 21 = 203$; d'où l'on tire $E = \frac{203}{16} = 12 + \frac{11}{16}$. En supposant donc qu'il y ait 3 livres de fer dans le morceau de fonte, on y trouvera 12 livres & $\frac{11}{16}$ d'étain, & par conséquent 64 livres $\frac{5}{16}$ de rosette : car l'addition de ces trois quantités donne 80 livres pour la première condition du Problême; & la huitième partie de 3 livres, plus la septième partie de 12 livres & $\frac{11}{16}$, avec la neuvième partie de 64 livres & $\frac{5}{16}$, donnent 9 livres & $\frac{1}{3}$ ou $\frac{28}{3}$, pour la seconde condition du Problême.

On pourroit faire un très-grand nombre d'autres suppositions semblables qui produiroient le même effet, parce qu'en prenant un peu plus d'une espèce de métal, on en prendroit un peu moins d'une autre, ce qui se compenseroit : car, si l'on détermine l'une des trois quantités, l'équation indiquera tou-

jours combien il en faut prendre des deux autres.

Quoique l'on puiſſe faire un très-grand nombre de ſuppoſitions, qui toutes aboutiſſent au même réſultat, il ne faut pas s'imaginer que le nombre en ſoit totalement arbitraire ; il eſt renfermé entre certaines bornes qui ſont déterminées par l'équation.

Reprenons donc l'équation $16E + 7F = 224$: je dis que l'on ne peut pas ſuppoſer que $F = 32$ livres, c'eſt-à-dire, qu'il y ait 32 livres de fer dans le morceau de fonte propoſé, puiſque l'équation $16E + 7F = 224$ devenant alors $16E + 7 \times 32 = 224$, ſe changeroit en celle-ci, $16E + 224 = 224$, d'où l'on tire $16E = 224 - 224 = 0$; ce qui ſignifie que ſeize fois la quantité d'étain eſt égale à rien, ou, pour parler plus naturellement, qu'il n'y a point d'étain dans l'alliage en queſtion ; ce qui eſt contre la ſuppoſition.

On ne peut donc pas ſuppoſer qu'il y ait juſqu'à 32 livres de fer ; & c'eſt ce que l'on appelle *une limite* que l'on ne ſçauroit atteindre, ni même outrepaſſer, ſans tomber dans une contradiction ; mais on peut prendre à liberté tous les nombres qui ſont en deſſous, entiers ou fractionnaires ; ils ſatisferont à la queſtion.

J'avertirai encore que, ſi la fonte réſultoit de l'alliage de quatre métaux, le Problême ſeroit doublement indéterminé, & il le ſeroit triplement, s'il y en avoit cinq, &c. En un mot, on jugera qu'un Problême eſt indéterminé, lorſqu'il ne ſera pas poſſible d'avoir autant d'équations qu'il y a d'inconnuës. Pour peu que l'on veuille s'y rendre attentif, on en découvrira la raiſon ; une plus ample diſcuſſion appartient à un Traité particulier des équations, où l'on eſt obligé d'épuiſer la matière, autant que le permet le progrès de la ſcience que l'on traite.

Il

Il y a des mesures dans l'Arpentage qui portent le même nom, lesquelles sont néanmoins fort différentes. On a déja dit que, pour les travaux Royaux, la perche contenoit 22 pieds, au lieu que la perche commune n'en a que 18. En mesurant un Terrein avec la perche Royale, on y trouvera moins d'arpens que s'il avoit été mesuré avec la perche commune; mais aussi ces arpens seront plus grands. Dans les achats & les ventes des Terreins, il faut toujours spécifier la perche, dont on a fait usage pour les évaluer. C'est alors que l'on a besoin assez souvent de transformer les arpens Royaux ou les perches Royales, en arpens communs ou en perches communes, & réciproquement les communes en Royales : car pour les toises, les pieds, les pouces, &c. il n'y a point de variation.

PROBLÊME.

On a trouvé qu'un Terrein, mesuré avec une perche de 22 pieds, contient 1 arpent, 70 perches, 0 toises, 30 pieds, 75 pouces quarrés; si on l'avoit mesuré avec une toise de 18 pieds, combien auroit-on trouvé d'arpens, de perches, &c?

RÉSOLUTION.

1°. On commencera par chercher le rapport de l'arpent Royal $= A$, à l'arpent commun $= a$, en disant : puisque la perche Royale $= 22$ pieds, cette perche quarrée $= 22 \times 22 = 484$ pieds quarrés : il y a 100 perches quarrées dans l'arpent ; ainsi l'arpent Royal $A = 484 \times 100 = 48400$ pieds quarrés.

Présentement, la perche commune $= 18$ pieds; donc la perche quarrée commune $= 324$ pieds

quarrés ; & l'arpent commun $a = 32400$ pieds quarrés.

Par conséquent $A . a :: 48400 . 32400$; & (en divisant par 400, pour réduire à la plus simple expression) on trouve que $A . a :: 121 . 81$, ou que $81 A = 121 a$, c'est-à-dire que 81 arpens Royaux valent 121 arpens communs.

2°. Ce rapport une fois déterminé, on procédera à la Résolution entière du Problême, en observant d'abord que l'on ne doit faire attention qu'aux arpens & aux perches quarrées, tout le reste étant égal dans les deux mesures. Or 1 arpent & 70 perches $= \frac{170}{100}$ d'arpent, (à cause qu'un arpent $=$ 100 perches quarrées) ; par conséquent on doit dire : si 81 arpens Royaux produisent 121 arpens communs, (ainsi qu'on l'a vû Art. 1.) combien $\frac{170}{100}$ d'arpent Royal produiront-elles d'arpens communs ? C'est une Règle de Trois, où l'on sçait qu'il faut multiplier $\frac{170}{100}$ par 121, & en diviser le produit $\frac{20570}{100}$ par 81, pour avoir $\frac{20570}{8100}$ $=$ 2 arpens communs $+ \frac{4370}{8100}$ d'arpent. L'arpent $=$ 100 perches quarrées ; en multipliant donc la fraction précédente par 100, on aura $\frac{437000}{8100}$ de perche quarrée, lesquelles $= \frac{4370}{81} = 53$ perches quarrées $+ \frac{77}{81}$ de perche quarrée. Mais la perche quarrée $=$ 9 toises quarrées ; multipliant donc $\frac{77}{81}$ par 9, on aura $\frac{693}{81}$ de toise quarrée $=$ 8 toises quarrées $+ \frac{45}{81}$ ou $\frac{5}{9}$ de toise quarrée, laquelle dernière fraction multipliée par 36 (parce qu'une toise quarrée $=$ 36 pieds quarrés) produira $\frac{180}{9}$ $=$ 20 pieds quarrés.

De manière que 1 arpent Royal & 70 perches quarrées Royales $=$ 2 arpens, 53 perches, 8 toises, 20 pieds de mesure commune ; & en y joignant les 30 pieds & les 75 pouces négligés, on verra que 1 arpent, 70 perches, 30 pieds, 75 pouces Royaux, feront, en mesures communes,

2 arpens, 54 perches, 14 pieds & 75 pouces quarrés. C. Q. F. T. & D.

Pour se convaincre de la justesse de ce calcul, on renversera la question, en demandant ce que vaudroient 2 arpens, 54 perches, 14 pieds, & 75 pouces quarrés communs, si on les réduisoit à la perche Royale.

On mettra à part, comme ci-dessus, les 14 pieds & 75 pouces, qui ne font aucune difficulté, & l'on se rappellera que 1 arpent $=$ 100 perches quarrées; qu'ainsi une perche quarrée $= \frac{1}{100}$ d'arpent: par conséquent 2 arpens & 54 perches $= 2 + \frac{54}{100}$ d'arpent $= \frac{254}{100}$ d'arpent; après quoi on fera ce raisonnement: puisque (Art. 1.) 121 arpens communs se réduisent à 81 arpens Royaux, à combien d'arpens Royaux se réduiront $\frac{254}{100}$ d'arpent commun? En multipliant (selon la règle de Trois) $\frac{254}{100}$ par 81, & divisant le produit $\frac{20574}{100}$ par 121, on aura pour le quotient $\frac{20574}{12100}$ d'arpent Royal, lesquelles $=$ 1 arpent $+ \frac{8474}{12100}$ d'arpent Royal. En multipliant cette fraction par 100 (parce que 1 arpent $=$ 100 perches quarrées) elle deviendra $= \frac{847400}{12100}$ de perche quarrée $= \frac{8474}{121} =$ 70 perches quarrées $+ \frac{4}{121}$ de perche quarrée, qu'il faut réduire en pieds quarrés. Or la perche quarrée Royale $=$ 22 pieds $\times$ 22 pieds $=$ 484 pieds quarrés; multipliant les $\frac{4}{121}$ de perche quarrée par 484, on aura $\frac{1936}{121}$ de pied quarré $=$ 16 pieds quarrés: ensorte que 2 arpens, 54 perches communes $=$ 1 arpent, 70 perches & 16 pieds quarrés Royaux. Que l'on y ajoute à présent les 14 pieds & 75 pouces quarrés qu'on a laissés là; on verra que 2 arpens, 54 perches, 14 pieds, & 75 pouces, en mesure commune, se réduisent à 1 arpent, 70 perches, 30 pieds, & 75 pouces Royaux, ainsi qu'on devoit le retrouver. C. Q. F. P.

PROBLÊME.

270. Trouver la somme d'une progression Géométrique descendante d'un nombre de termes infini (a), tel que $\div$ 2 . 1 . $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{16}$, &c.

RÉSOLUTION.

Pour bien comprendre la résolution de ce Problême, exprimons-le algébriquement : supposons la progression $a . b :: b . c :: c . d :: d . g$, &c. dont il s'agit de trouver la somme s. Remarquez que la somme des antécédents est composée de tous les termes moins le dernier g ; & que la somme des conséquents est aussi composée de tous les termes moins le premier a : ainsi la somme des antécédents $= s - g$; celle des conséquents $= s - a$. Or il a été démontré (n°. 258.) qu'une suite de rapports ou une progression étant donnée, la somme des antécédents est à la somme des conséquents, comme un antécédent quelconque est à son conséquent ; donc $s - g . s - a :: a . b$: ainsi $bs - bg = as - aa$; & comme l'on suppose $a > b$, à cause que la progression est descendante, on aura, en transposant, $aa - bg = as - bs$: divisant l'un & l'autre membre par $a - b$, il vient $\frac{aa - bg}{a - b} = s$; cela signifie que la somme s de tous les termes d'une progression finie descendante, est égale au quarré du premier terme, moins le produit du second par le dernier, le tout divisé par la différence du premier au second. Ainsi la somme de tous les termes de la progression finie $\div$ 2 . 1 . $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{16}$

(a) *L'infini.* Ce mot ne signifie pas une quantité éxistante : car il n'y a point d'infini dans la nature ; il exprime simplement la propriété qu'ont les nombres ou toutes les grandeurs, de pouvoir croître ou diminuer sans fin.

$= \frac{4 - 1 \times \frac{1}{16}}{2 - 1} = \frac{\frac{64 - 1}{16}}{1} = \frac{63}{16} = 3 + \frac{15}{16}$. Ce que vous trouveriez encore, en faisant l'addition successive de tous les termes de la progression proposée : mais, outre que cette méthode ne résout que des cas particuliers, lorsque le nombre des termes de la progression est considérable, elle devient d'une longueur excessive, & même comme impossible, si l'on suppose que ce nombre croisse sans fin ; au lieu qu'avec l'équation formulaire $s = \frac{aa - bg}{a - b}$, on peut résoudre en un instant tous les cas possibles.

Car, en supposant le nombre des termes plus grand qu'aucune quantité imaginable, le dernier terme sera d'une petitesse si énorme qu'il pourra être négligé, je ne dis pas seulement sans une erreur sensible, mais même sans une erreur assignable ; il n'y a donc aucun inconvénient à supposer $g = 0$: alors l'équation devient $s = \frac{aa}{a - b}$; (*a*) : elle exprime la somme de tous les termes d'une progression descendante, dont le nombre des termes croît sans fin ; par conséquent la somme de tous les termes de la progression infinie descendante ∺ 2 . 1 . $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$, &c. $= \frac{4}{2 - 1} = 4$.

(*a*) En supposant $g = 0$, l'équation $s = \frac{aa - bg}{a - b}$ devient $s = \frac{aa}{a - b}$. On conviendra bien que g doit disparoître de l'équation ; mais l'on ne se borne pas à l'anéantissement de la quantité g ; on extermine tout le terme $- bg$, qui est fort différent de la quantité g. Cela mérite effectivement d'être expliqué. Considérez donc que toute quantité qui multiplie zéro, ne peut donner que zéro ; ainsi 8 fois 0 = 0 ; donc aussi $- b \times 0 = 0$; & par conséquent g étant supposé $= 0$, on aura $- b \times g$ ou $- bg = 0$: voilà pourquoi tout le terme $- bg$ s'anéantit par la supposition de $g = 0$.

271. Il paroît assez surprenant que la somme de tous les termes d'une progression infinie soit très-souvent une quantité fort petite; vous trouverez, par exemple, en vous servant de la formule $s = \frac{aa}{a-b}$, que la somme des termes de la progression infinie descendante ∺ $\frac{1}{2} . \frac{1}{4} . \frac{1}{8} . \frac{1}{16} . \frac{1}{32} . \frac{1}{64}$, &c. = 1. Cependant rien n'est plus clair, pour peu que l'on y fasse attention. Appliquons la progression à une quantité réelle, à l'étendue d'un pied; prenons-en d'abord la moitié, ensuite la moitié du reste, c'est-à-dire $\frac{1}{4}$; il ne reste plus que $\frac{1}{4}$: prenons la moitié de ce quart ou $\frac{1}{8}$; il reste $\frac{1}{8}$: prenons encore la moitié de ce huitième de pied, & ainsi de suite, en prenant toujours la moitié de ce qui reste; il est clair que ce procédé n'épuisera jamais le second demi-pied tout entier, & qu'il en peut approcher à l'infini sans pouvoir le passer; par conséquent toutes les parties réunies, c'est-à-dire, la somme de tous les termes de la progression n'excédera jamais 1 pied : elle en sera même toujours éloignée de quelque chose, mais d'une distance inassignable; ensorte que 1 pied est plutôt la *limite* de cette progression qu'il n'en est la somme. Néanmoins dans une division infinie, la somme & la limite se confondent, à cause que la quantité dont elles diffèrent, est plus petite qu'aucune grandeur assignable.

COROLLAIRE.

272. Les deux premiers termes d'une progression infinie descendante étant donnés, on trouvera donc la somme de tous les termes de cette progression; puisque, suivant la formule $s = \frac{aa}{a-b}$, cette somme est égale au quarré du premier terme divisé par la différence du premier au second.

Mais il n'en eſt pas de même d'une progreſſion infinie aſcendante, c'eſt-à-dire, dont les termes vont toujours en croiſſant ; la ſomme de ces termes eſt inaſſignable, parce qu'elle n'a point de bornes : par éxemple, il eſt impoſſible de trouver la ſomme de la progreſſion ∺ 1 . 2 . 4 . 8 . 16 . 32 , &c. qui croît ſans fin, ou qui n'eſt renfermée dans aucunes limites.

Seulement, ſi le nombre de ſes termes étoit déterminé, & que l'on en donnât le premier, le ſecond & le dernier terme, on en trouveroit la ſomme, comme ci-deſſus. Car, en reprenant l'équation $bs - bg = as - aa$ du n°. 269, le ſecond terme b étant ſuppoſé plus grand que le premier terme a, on trouvera, en tranſpoſant, $bs - as = bg - aa$, & $s = \frac{bg - aa}{b - a}$; c'eſt à-dire, que la ſomme de tous les termes d'une progreſſion aſcendante qui n'eſt pas infinie, eſt égale au produit du ſecond terme par le dernier, moins le quarré du premier terme, le tout diviſé par la différence du ſecond terme au premier. En appliquant cette formule à une progreſſion numérique quelconque, on en trouvera la ſomme par la ſeule connoiſſance de ces trois termes, le premier, le ſecond & le dernier.

REMARQUE.

J'ai dit (n°. 269.) que le dernier terme d'une progreſſion deſcendante, dont le nombre des termes croît ſans fin, pouvoit être ſuppoſé $= 0$; c'eſt qu'en ce cas le dernier terme de cette progreſſion eſt une fraction, dont le dénominateur eſt d'une grandeur énorme par rapport à ſon numérateur. Or, quand cela arrive, la quantité exprimée par cette fraction diſparoît aux ſens : par éxemple, $\frac{1}{100000000000}$ de pied, ou la cent billionième partie

d'un pied, n'eſt pas aſſignable en longueur ; à plus forte raiſon une partie déſignée par une fraction incomparablement plus petite ſeroit-elle inaſſignable. Voilà pourquoi on la ſuppoſe égale au néant.

COROLLAIRE I. du n°. 272. Donc ſi d'une grandeur b on ôte la moitié, après cela la moitié de ce qui reſte, & ainſi de ſuite ſans fin, on parviendra à un reſte plus petit qu'aucune grandeur donnée, ou à un reſte que l'on pourra regarder comme o. Car toutes les portions ſouſtraites formeront une progreſſion Géométrique infinie deſcendante, dont le premier terme $= \frac{b}{2}$, & le ſecond $= \frac{b}{4}$, étant connus, on trouvera (272.) que la ſomme de cette progreſſion $= b$. Or b ôté de $b = 0$; donc, &c. Ce qu'il faut bien remarquer.

COROLLAIRE II. du n°. 272. La ſomme s d'une progreſſion Géométrique infinie deſcendante en raiſon quadruple, c'eſt-à-dire, dont le premier terme eſt quadruple du ſecond, le ſecond quadruple du troiſième, & ainſi de ſuite ; cette ſomme, dis-je, eſt au premier terme a de la progreſſion $:: 4 . 3$.

Pour le démontrer, reprenons l'équation $s = \frac{aa}{a-b}$ du n°. 272. Et comme on ſuppoſe le ſecond terme b de la progreſſion égal au quart du premier terme a, on n'a qu'à mettre $\frac{a}{4}$, au lieu de b, dans l'équation $s = \frac{aa}{a-b}$; & l'on aura $s = \frac{aa}{a - \frac{a}{4}} = \frac{aa}{\frac{3a}{4}} = \frac{4aa}{3a} = \frac{4a}{3}$. Donc $s \times 3 = a \times 4$, ou $s . a :: 4 . 3$. Ce qu'il faut encore bien remarquer.

Quand la progreſſion Géométrique eſt aſcendante, on en peut déterminer aiſément la ſomme s, ſans la connoiſſance du dernier terme, pourvû que

l'on en connoisse seulement le premier p, le nombre des termes n, & l'exposant e de la progression. On entend par l'*exposant* d'une progression, le nombre qui exprime combien de fois l'antécédent est contenu dans le conséquent du rapport qui règne dans la progression. Si l'on a, par éxemple, la progression Géométrique ∺ 2 . 6 . 18 . 54, &c. le rapport de deux termes consécutifs étant toujours le même, par la nature de la progression, celui de la proposée est exprimé par la raison de 2 à 6; en divisant donc 6 par 2, on a 3 pour l'*exposant* de la progression.

Ainsi, quel que soit le second terme x d'une progression Géométrique ascendante, dont le premier terme est p, son exposant $e = \frac{x}{p}$; donc le second terme $x = pe$, & la progression ascendante devient, $p . pe :: pe . \frac{p^2 e^2}{p} = pe^2$ pour son troisième terme; en continuant, on aura $pe . pe^2 :: pe^2 . \frac{p^2 e^4}{pe} = pe^3$ qui en sera le quatrième. Si l'on poursuit en faisant $pe^2 . pe^3 :: pe^3 . \frac{p^2 e^6}{pe^2} = pe^4$, cette expression pe^4 sera le cinquième terme de cette progression Géométrique ascendante; laquelle s'exprimera plus simplement en écrivant ∺ $p . pe . pe^2 . pe^3 . pe^4$, &c. où il faut bien remarquer, qu'en prenant un terme quelconque d'une progression Géométrique ascendante, on y trouvera toujours le produit du premier terme p par l'exposant e élevé à une puissance moindre d'un degré que le nombre qui indique sa place: car dans le cinquième terme pe^4, l'exposant e n'est élevé qu'à sa quatrième puissance, &c. & comme le dernier de ses termes en indique toujours le nombre n par la place qu'il occupe, il est évident que ce dernier terme $= pe^{n-1}$. L'expression de la somme

de tous les termes d'une pareille progreſſion eſt donc $= s$, ſon premier terme $= p$, ſon ſecond $= pe$, & ſon dernier $= pe^{n-1}$.

Que l'on ſe rappelle à préſent la Réſolution du n°. 270, & l'on verra que la ſomme des antécédents de cette progreſſion eſt égale à la ſomme s de tous ſes termes, moins le dernier pe^{n-1}; la ſomme des antécédents eſt donc $s - pe^{n-1}$: on y verra auſſi que la ſomme de ſes conſéquents eſt égale à la ſomme s de tous ſes termes, moins le premier p, & qu'ainſi l'expreſſion de la ſomme des conſéquents $= s - p$.

Mais il eſt démontré (n°. 258.) que, dans une ſuite de rapports Géométriques égaux, la ſomme des antécédents eſt à celle des conſéquents, comme un antécédent quelconque eſt à ſon conſéquent; c'eſt-à-dire ici que $s - pe^{n-1}. s - p :: p . pe$. Donc (en faiſant le produit des extrêmes & celui des moyens) l'on a $pes - p^2e^n$ (*a*) $= ps - p^2$; donc (en tranſpoſant) $pes - ps = p^2e^n - p^2$; &, diviſant par p, l'on a $es - s = pe^n - p$, ou $\overline{e - 1} \times s = pe^n - p$; & enfin, en diviſant par $e - 1$, il vient $s = \frac{pe^n - p}{e - 1}$ pour la ſomme s de tous les termes de cette progreſſion. Ce qui ſignifie que cette ſomme eſt égale au produit du premier terme p par l'expoſant e, élevé à la puiſſance indiquée par le nombre n des

(*a*) On vient de voir qu'en multipliant $-pe^{n-1}$ par pe, l'on a eu $-p^2e^n$. Car, ſi l'on multiplioit x^2 par x^3, on auroit $x^{2+3} = x^5$; ce qui fait voir que, quand les racines qui ſe multiplient ſont les mêmes, on écrit au produit une ſeule fois la racine, & on lui donne pour expoſant la ſomme des expoſans des quantités qui ſe multiplient. Ainſi $-pe^{n-1} \times pe$ ou $\times pe^1 = -p^2e^{n-1+1} = -p^2e^n$; comme on le voit dans le texte.

termes, pourvû que l'on en ôte le premier terme p, & que l'on en divise le reste par l'exposant e diminué de l'unité.

PROBLÊME,

Où l'on va voir l'application de la formule $s = \frac{pe^n - p}{e - 1}$.

Un homme joue contre un autre au *Passe-Dix* avec trois dez. Le second a parié d'abord un Louis que le premier ne passeroit pas ; celui ci a passé. Le perdant, dont le projet étoit de se retirer du jeu dès qu'il auroit gagné un Louis, en met deux pour le second coup, & il les perd. Il en met donc quatre au troisième coup, qu'il perd encore ; doublant toujours pour le coup suivant ce qu'il a perdu dans le précédent, il parvient à perdre tout l'or qu'il portoit : ayant néanmoins continué de parier sur sa parole d'honneur, il a perdu 20 coups de suite ; après quoi celui qui tenoit les dez a refusé de tenir les paris, voulant sçavoir si toutes ces pertes réunies n'excédoient pas les facultés de son adversaire.

RÉSOLUTION.

Il a perdu 1 au premier coup ; au second 2 ; au troisième 4 ; au quatrième 8, &c. La suite des pertes forme donc la progression Géométrique ascendante ∺ 1 . 2 . 4 . 8, &c. dont il faut trouver la somme. Prenez la formule $s = \frac{pe^n - p}{e - 1}$. Puisque le premier terme $p = 1$, l'exposant $e = 2$, le nombre des termes $n = 20$; en faisant la substitution, cette équation deviendra $s = \frac{\overline{1 \times 2}^{2} - 1}{2 - 1}$

$= \frac{2^{20}-1}{1} = 2^{20} - 1$; c'est-à-dire, que la somme des Louis perdus est représentée par le produit de l'exposant 2 élevé à la vingtiéme puissance, duquel produit on ôtera 1.

Multipliez donc 2 par 2, vous aurez 4 pour la seconde puissance de 2. En multipliant 4 par 4, on aura 16 pour sa quatrième puissance; & $16 \times 2 = 32$ en sera la cinquième puissance; $32 \times 32 = 1024$ en sera la dixième; ainsi, en multipliant 1024 par 1024 le produit 1048576 donnera la vingtième puissance de 1. Si l'on ôte 1, on trouvera que la perte totale est de 1048575 Louis. Ce qui est énorme.

Quand même le perdant n'auroit parié d'abord qu'un liard, il n'auroit pas laissé de perdre 13107 livres, 3 sols, 3 liards; ce que vous trouverez, en divisant 1048575 liards par le nombre 80 qui exprime combien il y a de liards dans une livre. Cette dernière perte est toujours fort considérable pour un homme ordinaire, & démontre avec quelle circonspection l'on doit s'engager dans ces sortes de jeux; puisqu'un premier pari, aussi vil que celui d'un liard, conduiroit néanmoins à une perte qui pourroit ruiner les affaires d'un très grand nombre de particuliers.

PROBLÊME

QUI EST L'INVERSE DU PRÉCÉDENT.

Supposons présentement que le perdant de la question précédente prenne sa revanche & tienne le dez; que son même adversaire parie deux Louis pour le premier coup, & qu'il double toujours au coup suivant ce qu'il aura perdu dans le précédent, comme on a fait ci-dessus. Combien doit-il perdre

de coups de ſuite, pour que ſon antagoniſte ne lui doive plus rien ou preſque rien?

RÉSOLUTION.

I. Quoique le premier pari ſoit double, dans ce Problême-ci, du premier pari de la queſtion précédente, il faudra que ſon adverſaire gagne dix-neuf coups de ſuite pour s'acquitter à peu-près. Il ne perdra plus qu'un Louis.

DÉMONSTRATION.

Reprenons l'équation $s = \frac{pe^n - p}{e - 1}$. Il s'agit, d'en dégager l'inconnuë n qui indique le nombre des coups. Multiplions ſes deux membres par $e - 1$, & tranſpoſons enſuite $-p$; nous aurons $es - s + p = pe^n$; diviſant encore par p, l'équation deviendra $\frac{es - s + p}{p} = e^n$. Or (ſupp.) $e = 2$, & $p = 2$; donc on aura $\frac{2s - s + 2}{2} = 2^n = \frac{s+2}{2}$; mais la ſomme s à gagner doit être égale à la ſomme perdue, laquelle eſt de 1048575 Louis; par conſéquent $2^n = \frac{1048577}{2} = 524288\frac{1}{2}$. Elevez donc le nombre 2 à ſes puiſſances ſucceſſives, juſqu'à ce que vous en trouviez une $= 524288\frac{1}{2}$ ou approchant; & ſon degré vous indiquera le nombre des coups de ſuite que doit gagner celui qui tient le dez. Vous verrez que la dix-neuvième puiſſance de $2 = 524288$, nombre qui eſt très-proche de $524288\frac{1}{2}$. Ainſi le nombre n des coups gagnés de ſuite doit être 19. On le prouvera, en cherchant la ſomme s d'une progreſſion Géométrique aſcendante, dont le premier terme $p = 2$, l'expoſant $e = 2$, le nombre

des termes $n = 19$; &, pour y parvenir, on reprendra la formule $s = \frac{pe^n - p}{e - 1}$, laquelle par la substitution des nombres, deviendra $s = \frac{2 \times 2^{19} - 2}{2 - 1}$ $= \frac{2 \times 524288 - 2}{1} = 1048576 - 2 = 1048574$ Louis. Ce gain ne diffère que d'un Louis de la perte précédente.

II. Si l'on a des Tables de Logarithmes fort étendues, on trouvera sans tâtonnement le nombre n des coups. Supposons que l mise à la tête d'un nombre, en exprime le Logarithme. Puisque 2^n $= \frac{1048577}{2}$, comme on vient de le voir (Art. I.), le Logarithme de 2^n est égal au Logarithme de $\frac{1048577}{2}$; c'est-à-dire, $n\,l\,2$ * $= l\frac{1048577}{2}$; & par conséquent $n = \frac{l\frac{1048577}{2}}{l\,2}$. Ce qui signifie qu'en divisant le Logarithme de $\frac{1048577}{2}$ par celui de 2, on aura au quotient le nombre n des coups, que l'on trouvera égal à 19.

* Si on ne concevoit pas d'abord que le Logarithme de $2^n = n\,l\,2$, il faudroit se rappeller ou relire le n° 264, où l'on a fait voir que le Logarithme d'un quarré ou d'une seconde puissance est toujours double de celui de sa racine ; que le Logarithme d'un cube ou d'une troisième puissance est le triple du Logarithme de sa racine, &c. C'est donc-à-dire que l'on a le Logarithme d'une puissance quelconque, en multipliant le Logarithme de sa racine par l'exposant de cette même puissance ; par conséquent 2 étant la racine & n l'exposant de la puissance 2^n, l'expression de son Logarithme $= n\,l\,2$.

On voit par-là qu'il ne faut pas pénétrer fort avant dans les secrets des nombres, pour tomber dans les Logarithmes. On y est jetté par les questions les plus communes, dont on ne sçauroit se démêler autrement que par de longs circuits, ou par des tâtonnemens qui font peu d'honneur au Mathématicien. Ceux qui auroient passé légérement sur les Logarithmes, & qui se destineroient néanmoins à une profession ou à un

Cependant, comme on ne doit point laisser aller seules des personnes qui ont compté sur un guide perpétuel, je vais les conduire. Elles ne trouveront point le Logarithme de 1048577 dans les Tables *in*-8°. d'Ozanam, que j'ai sous les yeux, comme les plus communes; puisqu'on n'y a les Logarithmes des nombres naturels que jusqu'à 10000 Mais, en faisant usage de la méthode qui y est enseignée, on le trouvera de 6.0206003; & le Logarithme de 2 = 0.3010300. Or, puisqu'une fraction revient à une division, dans laquelle le numérateur seroit dividende & le dénominateur seroit diviseur, il faut (n°. 264.) ôter le Logarithme du dénominateur de celui du numérateur, pour avoir le Logarithme de cette fraction; par conséquent celui de $\frac{1048577}{2} = 6.0206003$ moins 0.3010300 = 5.7195703, que l'on doit diviser par le Logarithme de 2 = 0.3010300, pour avoir le nombre des coups *n*. Or 57195703 divisés par 3010300 donnent au quotient 19; le 3 qui reste après la division, exprime une fraction si excessivement petite, qu'on la doit compter pour rien.

état, dont les Mathématiques seroient la base, doivent y revenir indispensablement, en étudier scrupuleusement la nature, la formation, les usages, & s'en rendre la pratique très-familière. La question même, qui occasionne cette note, démontre que les Financiers & les Commerçans feroient très-bien de s'y exercer; leurs intérêts forment souvent des progressions, dont ils apprécieroient les sommes avec une extrême facilité par le secours des Logarithmes.

Les Tables ordinaires de ces nombres ne sont pas assez étendues pour répondre à toutes les questions: mais, dans tous les Livres qui en traitent expressément & mathématiquement, on trouve un art fort simple d'avoir le Logarithme d'un nombre plus grand que ceux des Tables; il est donc à propos de s'en fournir & d'en avoir toujours sous sa main.

De la Progression Arithmétique.

273. La progression Arithmétique n'est qu'une proportion Arithmétique continue, qui a plus de trois termes. Elle est *ascendante* ou *descendante*, selon que ses termes vont en croissant ou en décroissant. 2 . 4 : 4 . 6 : 6 . 8 : 8 . 10, &c. est une progression Arithmétique ascendante, que l'on écrit plus simplement de cette manière, ÷ 2 . 4 . 6 . 8 . 10, &c. où vous remarquerez que la même différence règne toujours entre deux termes consécutifs quelconques, & que le second terme vaut la somme du premier, & de la différence entre deux termes consécutifs, que nous appellerons dans la suite, *différence de la progression*, en la désignant par la lettre d. Le troisième terme est égal au second, joint à la différence d; mais le second $=$ le premier $+ d$; donc le troisième $=$ le premier $+ 2d$: de même le quatrième $=$ le troisième $+ d$: or le troisième $=$ le premier $+ 2d$; donc le quatrième $=$ le premier $+ 3d$; de sorte que, 1°. *un terme quelconque d'une progression Arithmétique est toujours égal au premier terme, joint à la différence de la progression multipliée par le nombre des termes qui le précèdent.*

2°. Le dernier terme d'une progression Arithmétique est donc égal au premier, joint à la différence de la progression multipliée par le nombre de tous ses termes moins 1; puisque le nombre des termes qui le précèdent, est le même que celui de tous les termes de la progression, dont on ôte un terme. Appellant donc p le premier terme d'une progression Arithmétique quelconque, d sa différence, u son dernier terme, n le nombre de ses termes, on aura $u = p + d \times \overline{n-1}$.

3°. Par

3°. Par conséquent le premier terme p, le dernier u, & le nombre des termes n d'une progression Arithmétique étant donnés, on en trouvera la différence d, en ôtant le premier terme du dernier, & divisant ensuite ce reste par le nombre des termes moins 1. Car, puisque (Art. 2.) $u = p + d \times \overline{n - 1}$, on aura $u - p = d \times \overline{n - 1}$; donc $\frac{u - p}{n - 1} = d$.

4°. On déterminera aussi le nombre des termes d'une progression Arithmétique, dont le premier terme p, le dernier u, & la différence d seront donnés, en ôtant le premier du dernier, & divisant ce reste par la différence de la progression, puisqu'il ne s'en faudra que 1, que l'on n'ait alors le nombre des termes. Pour le démontrer, reprenons l'équation $u = p + \overline{d \times n - 1}$, laquelle, en transposant p, donnera $u - p = \overline{d \times n - 1}$; donc $\frac{u - p}{d} = n - 1$: où l'on voit qu'en ajoutant 1 à $n - 1$, l'on aura le nombre des termes n.

5°. Dans une progression Arithmétique quelconque $\div a . b . c . d . e . f . g$, &c. la somme $c + e$ de deux termes quelconques c, e, à égale distance des extrêmes a, g, est égale à la somme $a + g$ de ces extrêmes; il faut donc démontrer que $c + e = a + g$.

DÉMONSTRATION.

En développant la progression de cette manière $a . b : b . c : c . d : d . e : e . f : f . g$, il est visible que $a : b : f : g$; donc $a + g = b + f$: pareillement que $b . c : e . f$; donc $b + f = c + e$: ainsi $c + e = a + g$.

6°. Ainsi le nombre des termes étant impair;

comme dans la proposée, le double $2d$ du terme du milieu $= a + g$; somme des extrêmes. Car, en jettant un coup d'œil sur la progression développée (art. 5.) on voit que $c . d : d . e$; donc $2d = c + e$: or $c + e = a + g$ (art. 5.); donc $2d = a + g$.

7°. Donc $d = \frac{a + g}{2}$, c'est-à-dire, que le terme d du milieu est égal à la moitié de la somme des extrêmes $a + g$.

8°. La somme s de tous les termes d'une progression Arithmétique quelconque est égale à la somme des extrêmes, multipliée par la moitié du nombre des termes de cette progression.

DÉMONSTRATION.

Si le nombre des termes est pair, chaque somme des termes à égale distance des extrêmes renfermant deux termes, le nombre de ces sommes jointes à celle des extrêmes ne sera que la moitié du nombre des termes de la progression. Or chacune de ces sommes est égale à celle des extrêmes (art. 5.); en multipliant donc celle des extrêmes par le nombre de ces sommes, c'est-à-dire, par la moitié du nombre des termes, on aura la valeur de toutes ces sommes, ou de toute la progression : ce qui donne l'équation $S = \overline{p + u} \times \frac{n}{2}$.

Si le nombre des termes est impair, il n'y a qu'à supposer d'abord que l'on ôte le terme du milieu : le nombre des termes sera pair, & exprimé par $n - 1$; donc la somme des termes de cette progression, dont on aura ôté un terme, sera $\overline{p + u} \times \frac{n - 1}{2}$, à laquelle il ne manquera qu'un terme,

pour être la somme de la progression proposée : or ce terme ôté étant celui du milieu, est égal à $\frac{p+u}{2}$, c'est-à-dire, à la moitié de la somme des extrêmes; donc, pour compléter la somme des termes de cette progression, il faudra y remettre le terme ôté, qui est $\frac{p+u}{2}$; moyennant quoi la somme de tous les termes de la progression sera $S = \overline{p+u} \times \frac{n-1}{2} + \frac{p+u}{2} = \frac{pn+nu-p-u}{2} + \frac{p+u}{2} = \frac{pn+nu}{2} = \overline{p+u} \times \frac{n}{2}$. Ce qui signifie que la somme cherchée S est égale à la somme des extrêmes $p + u$ multipliée par $\frac{n}{2}$, moitié du nombre des termes. La Proposition est donc généralement vraie, soit que le nombre des termes soit pair, soit qu'il soit impair.

9°. Par conséquent, *si le premier terme d'une progression Arithmétique ascendante est* o, *la somme de tous les termes de la progression sera égale au dernier terme multiplié par la moitié du nombre des termes*; ce qui est tout-à-fait évident, quand même on n'auroit pas l'équation $S = \overline{p+u} \times \frac{n}{2}$, qui le démontre invinciblement; puisqu'en ôtant le premier terme p, que l'on suppose égal à zéro, elle devient $S = u \times \frac{n}{2}$; c'est-à-dire, égal au dernier terme u, multiplié par $\frac{n}{2}$, moitié du nombre des termes. Cette vérité est essentielle pour l'intelligence de mon Traité des *Sections Coniques & autres Courbes anciennes appliquées aux Arts*, que je publiai, il y a quelques années.

PROBLÊME,

Où l'on fait usage de la Progression Arithmétique.

On se propose de planter une Avenue, dont les deux côtés doivent avoir chacun 300 toises, les arbres à 3 toises l'un de l'autre. Pour les porter plus commodément à l'endroit de leur destination, celui qui en est chargé doit les prendre à 3 toises du premier que l'on plantera. Comme on suppose leur pesanteur assez considérable, il ne pourra en transporter qu'un seul à la fois. Afin donc que l'on puisse évaluer le tems qu'il emploiera à ce transport, on demande la longueur du chemin qu'il sera obligé de faire.

RÉSOLUTION.

Remarquez d'abord que, pour remplir cette condition, il faut que l'ouvrier transporte cent & un arbres de chaque côté. Car le premier intervalle 3 toises éxige deux arbres, un au commencement & l'autre à la fin : ainsi deux intervalles en éxigeront trois; pour trois il en faudra quatre; & enfin cent intervalles, qui feront les 300 toises d'un côté, demanderont cent & un arbres.

Observez en second lieu, que chaque arbre, transporté séparément, éxige l'aller & le venir. Il faudra que l'ouvrier fasse 6 toises de chemin pour le premier arbre, 12 pour le second, 18 pour le troisième, 24 pour le quatrième, &c. & 606 toises pour le cent-unième & dernier. Or 6, 12, 18, 24, &c. forment une progression Arithmétique; puisqu'il y a toujours la même différence 6 entre chaque terme consécutif. Le premier terme de cette Progression étant 6, le dernier 606, &

le nombre des termes 1 0 1, on en aura la somme S (art. 8. du no. 273.) en multipliant 6 1 2, qui est celle des extrêmes 6 & 606, par $\frac{101}{2}$ moitié de 1 0 1, nombre des termes de cette progression, c'est-à-dire, que $S = 612 \times \frac{101}{2} = 306 \times 101 = 30906$ toises.

L'ouvrier destiné au transport de ces arbres, sera donc obligé de faire, pour chaque côté de l'Avenue, un chemin de 3 0 9 0 6 toises, & par conséquent 6 1 8 1 2 toises pour les deux côtés.

Si l'on évalue la lieuë Françoise à 2 8 5 0 toises, on verra que ce chemin est de 2 1 lieuës, & un peu plus de deux tiers.

Je suppose ici vingt lieuës au degré terrestre; & 5 7 0 0 0 toises pour un degré moyen de la terre: car il paroît que les degrés des différentes latitudes ne sont pas tous précisément de la même longueur (*a*).

(*a*) *Ne sont pas tous précisément de la même longueur.* L'Académie des Sciences s'est fort occupée de ces recherches depuis trente ans. Elles pouvoient contribuer à la perfection de la Géographie & de la Navigation. Si la Terre est parfaitement ronde ou sphérique en tous sens, les degrés de sa circonférence doivent être tous de la même longueur. Mais une autre courbure doit y apporter des inégalités. En prenant en toises la longueur de quelques degrés dans la seule étendue de la France, leurs différences pouvoient n'être pas assez sensibles, mais le devenir à des distances fort éloignées.

Cette raison détermina le Roi à envoyer, en 1735, Mrs. Godin, Bouguer, & la Condamine au *Pérou*, vers les environs de l'équateur; & en 1737, Mrs. Maupertuis, Clairaut, le Camus & le Monnier, dans la Laponie Suédoise, aux environs du cercle polaire. Ceux-ci trouvèrent qu'un degré terrestre contenoit 57422 toises; on ne l'eut au Pérou que de 56753, tandis qu'on l'avoit en France de 57074 toises: par où l'on voit que les degrés terrestres croissent en longueur, en allant de l'équateur au pole. Cependant ces différences ne paroissent pas assez considérables pour rien changer à la construction des Cartes.

CHAPITRE II.

Des Lignes Proportionnelles.

LES proportions des nombres, dont nous avons établi les propriétés dans le Chapitre précédent, serviront de base aux proportions des lignes qui vont être l'objet de ce Chapitre. Une proportion *linéaire* une fois donnée, ses termes seront susceptibles des mêmes variations que ceux d'une proportion numérique. Ce qui nous importe donc ici particulièrement, est d'arriver à une proportion linéaire, & de déterminer dans quelles circonstances les lignes deviennent proportionnelles : car après cela on pourra leur faire subir toutes les transformations qui leur conviennent, suivant le besoin que l'on en aura ; mais nous avons promis de déduire immédiatement les unes des autres toutes les Propositions des trois premiers Livres de notre Géométrie ; il est donc nécessaire que la dernière Proposition du second Livre, qui est la dix-septième dans l'ordre des Propositions, soit le principe, ou tout au moins soit un des principes qui concourent à établir la première Proposition du troisième Livre, c'est à-dire, la dix-huitième Proposition.

PROPOSITION XVIII.

274. Les surfaces des Triangles quelconques CAB, *cab* (*fig.* 66.) sont entr'elles, comme les produits de leur base par leur hauteur.

Soit la surface du Triangle CAB = S, sa base AB = B, sa hauteur CH = H ; & la surface du

Triangle $cab = s$, sa base $ab = b$, & sa hauteur $eh = h$. Il faut démontrer que $S . s :: BH . bh$.

DÉMONSTRATION.

Rappellez vous la Proposition 17 (n°. 172.) où il a été démontré que les Triangles de même base & de même hauteur sont égaux en surface ; ainsi la surface du Triangle ABC, dont CH est la hauteur, & AB la base, est égale à la surface d'un Triangle Réctangle, qui auroit AB pour base & CH pour hauteur. Or on détermine la surface d'un Triangle Réctangle, en prenant la moitié du produit de sa base par sa hauteur (n°. 168.) ; par conséquent $S = \frac{BH}{2}$; & par la même raison $s = \frac{bh}{2}$; donc $S . s :: \frac{BH}{2} . \frac{bh}{2} :: BH . bh$: car les moitiés sont entr'elles comme les touts dont elles sont moitiés. Ainsi $S . s :: BH . bh$, C. Q. F. D.

Cette Proposition n'a point de converse, parce qu'elle n'est pas composée de deux parties, dont l'une soit la conséquence de l'autre (n°. 177. Note *a*.)

Comme les Parallélogrammes sont doubles des Triangles, il est clair que les Parallélogrammes sont aussi comme les produits de leur base par leur hauteur.

PROBLÊME.

275. Déterminer le rapport de deux Triangles, dont l'un a 8 pieds de base sur 5 de hauteur, & l'autre 12 de base sur 6 de hauteur.

RÉSOLUTION.

Appellons s la surface du premier Triangle, & S celle du second.

Par la Proposition précédente $s . S :: 8 \times 5 . 12$

× 6 :: 8 × 5 . 9 × 8 :: 5 . 9, en divisant par 8 les deux termes du dernier rapport, ce qui ne détruit pas la proportion (nº. 252.); donc s . S :: 5 . 9, c'est-à-dire, que le premier Triangle s ne contient que les $\frac{5}{9}$ du second Triangle S.

La surface d'un Triangle est donc connue dès que l'on sçait son rapport à celle d'un autre Triangle, dont on a la mesure.

PROPOSITION XIX.

276. Les Triangles de même hauteur sont entr'eux comme leur base; & les Triangles de même base sont entr'eux comme leur hauteur.

Remarquez que par Triangles on entend ici l'aire ou la surface de ces Triangles.

DÉMONSTRATION.

Supposant les mêmes dénominations que nous avons données (nº. 274.), il s'agit de prouver que S . s :: B . b, si H = h, ou que S . s :: H . h, si B = b. Or (par la Proposition 18.) S . s :: BH . bh; donc, 1º. en divisant les deux derniers termes par H = h (supp.), S . s :: B . b; ou, 2º. en divisant par B = b, S . s :: H . h, C. Q. F. D.

La converse de cette Proposition est vraie, c'est-à-dire, que les Triangles, qui sont entr'eux comme leur base, ont nécessairement même hauteur; & ceux qui sont entr'eux comme leur hauteur, ont nécessairement même base.

Il faut donc prouver que l'on aura H = h, si S . s :: B . b, ou que B = b, si S . s :: H . h.

DÉMONSTRATION.

1º. (Supp.) S . s :: B . b: d'un autre côté

(n°. 274.) S . s :: BH . bh; mais deux rapports, égaux à un troisième rapport, sont égaux entr'eux ; donc B . b :: BH . bh : ainsi B b h = B b H; & divisant l'un & l'autre membre par B b, on a h = H; C. Q F. 1°. D.

2°. Puisque (supp.) S . s :: H . h, & que (n°. 274.) S . s :: BH . bh; donc H . h :: BH . bh : ainsi b H h = B H h; & par conséquent en divisant l'un & l'autre membre par H h, on a B = b; C. Q. F. 2°. D.

Les Parallélogrammes étant doubles des Triangles, il faut leur attribuer les mêmes propriétés que nous venons de découvrir.

PROBLÊME.

277. Trouver le rapport d'un Triangle, dont la base = 7 toises, & la hauteur en vaut 4, à un autre Triangle, dont la base = aussi 7 toises & la hauteur 20.

RÉSOLUTION.

Dites : puisque ces Triangles ont même base, ils sont entr'eux comme leurs hauteurs (par la Proposition précédente) : ainsi s . S :: 4 . 20 :: 1 . 5 ; donc s . S :: 1 . 5, c'est-à-dire, que la surface de l'un n'est que la cinquième partie de la surface de l'autre.

PROPOSITION XX.

278. Deux Triangles égaux en surface, & qui ont même base, ont nécessairement même hauteur, ou sont posés entre les mêmes parallèles.

On suppose donc que S = s, & B = b ; d'où il faut conclure que H = h.

DÉMONSTRATION.

Par la Proposition précédente, les Triangles de même base sont entr'eux comme leurs hauteurs; donc S . s : : H . h; mais (supp.) S = s : ainsi H = h; C. Q. F. D.

Réciproquement deux Triangles égaux, qui ont même hauteur, ont nécessairement même base; c'est-à-dire, que si S = s, & H = h, on aura B = b.

DÉMONSTRATION.

Les Triangles de même hauteur sont entr'eux comme leurs bases (n°. 276.); donc S . s : : B . b; mais (par la supp.) S = s; par conséquent B = b; C. Q. F. D.

PROPOSITION XXI.

279. Une ligne B D qui coupe deux côtés A C, A F, d'un Triangle A C F, parallèlement à son troisième côté C F (*fig*. 67.), coupe ces deux côtés en proportion, c'est-à-dire, que A B. B C : : A D . D F.

Avant de procéder à la Démonstration, tirez les lignes C D, B F, & remarquez que le Triangle C B D est égal au Triangle F D B : car, en prenant B D pour base de ces Triangles, on voit qu'ils sont posés entre les mêmes parallèles, B D, C F, (supp.) : ces Triangles sont donc égaux (n°. 172.); cela posé.

DÉMONSTRATION.

Comparez le Triangle A B D avec le Triangle C B D; vous voyez qu'ils se terminent au même

point D : ainsi les considérant l'un & l'autre appuyés sur la ligne A C, comme ils le sont en effet, il est clair que ces deux Triangles ont même hauteur; mais (n°. 276.) les Triangles de même hauteur sont entr'eux comme leur base; par conséquent, on a cette première Proportion (a) *T* A B D. *T* C B D : : A B . B C, (parce que la hauteur de ces Triangles se prenant du point D, ce sont les côtés A B, B C opposés, qui en sont les bases.)

Comparez encore le même Triangle A B D avec le Triangle F D B; en les regardant comme appuyés sur la ligne A F, leur sommet se réunit au même point B : ils ont même hauteur, & par conséquent ces Triangles sont entr'eux comme leurs bases A D, D F; ce qui donne cette autre proportion,

T A B D . *T* F D B : : A D . D F;

& rapprochant la première proportion,

T A B D . *T* C B D : : A B . B C,

on a deux proportions, dont le premier rapport de la première, est égal au premier rapport de la seconde, puisque ce sont des grandeurs égales qui composent ces rapports de part & d'autre. Par conséquent les seconds rapports sont aussi égaux, c'est-à-dire, que A B . B C : : A D . D F; C. Q. F. D.

Comme cette Proposition est fondamentale, nous allons la résumer en peu de mots. Parce que les Triangles A B D, B C D, ont même hauteur, ils sont entr'eux comme leurs bases A B, B C; par conséquent *T* A B D . *T* C B D : : A B . B C; & par la même raison, *T* A B D . *T* F D B : : A D . D F.

Ainsi de la première proportion l'on tire $\frac{TABD}{TCBD}$

(a) La Lettre *T* signifie le Triangle : ainsi *T* A B D veut dire le Triangle A B D.

$= \frac{AB}{BC}$; & de la seconde il vient $\frac{TABD}{TFDB} = \frac{AD}{DF}$.

Et, comme le Triangle CBD a été démontré égal au Triangle FDB, il s'ensuit que $\frac{TABD}{TCBD}$ $= \frac{TABD}{TFDB}$; & par conséquent $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DF}$, ou autrement, AB . BC :: AD . DF.

La converse de cette Proposition est vraie; c'est-à-dire, que si deux côtés AC, AF, du Triangle ACF sont coupés en parties proportionnelles par la ligne BD, cette ligne sera nécessairement parallèle au troisième côté CF.

Tirez, comme ci-dessus, les lignes CD, BF; on aura démontré que BD est parallèle à CF, si l'on fait voir que les Triangles CBD, FDB de même base BD, sont égaux en surface: car alors (par la prop. 20.) des Triangles égaux en surface, qui ont d'ailleurs même base, ont nécessairement même hauteur; ou, ce qui est la même chose, sont nécessairement posés entre mêmes parallèles. Il s'agit donc de démontrer, qu'en supposant la proportion AB . BC :: AD . DF, ou l'équation $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DF}$, on aura nécessairement le Triangle CDB = au Triangle FDB. (*fig.* 67.)

DÉMONSTRATION.

Le Triangle CBD a même hauteur que le Triangle ABD; ces deux Triangles sont donc entr'eux comme leurs bases AB, BC (n°. 276.); & par conséquent on a cette proportion, TABD . TCBD :: AB . BC. Par la même raison, en

en comparant le Triangle A B D avec le Triangle F D B, on trouve que $TABD . TFDB :: AD . DF$. De la première proportion on tire l'équation suivante $\frac{TABD}{TCBD} = \frac{AB}{BC}$; & la seconde proportion donne $\frac{TABD}{TFDB} = \frac{AD}{DF}$: mais, (par la supposition) $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DF}$; donc $\frac{TABD}{TCBD} = \frac{TABD}{TFDB}$, ou $TABD . TCBD :: TABD . TFDB$; & en alternant $TABD . TABD :: TCDB . TFDB$: or $TABD = TABD$; par conséquent $TCBD = TFDB$; c'est-à-dire, que le Triangle C B D est égal au Triangle F D B : de plus ces Triangles ont la même base B D; donc (Prop. 20.) ils ont même hauteur; ou, ce qui est le même, ils sont posés entre mêmes parallèles; donc enfin B D est parallèle à C F; C. Q. F. D.

Toute la théorie des lignes proportionnelles est fondée sur cette Proposition & sur sa converse: ce qui va suivre, n'en sera, pour ainsi dire, que le développement; c'est pourquoi il faut s'attacher à la bien comprendre: si une fois on l'a bien conçue, toutes les Propositions qui en tirent leur Démonstration, & qui ne sont pas en petit nombre, seront entendues presqu'en même tems qu'elles seront lûes.

COROLLAIRE I.

280. Puisque nous avons la proportion $AB . BC :: AD . DF$, nous pouvons lui appliquer les propriétés que nous avons démontrées touchant les proportions en général.

Ainsi, 1°. en alternant, AB . AD :: BC . DF. 2°. (n°. 251.) AB + BC . BC :: AD + DF . DF, ou AC . BC :: AF . DF; & en alternant, on aura AC . AF :: BC . DF.

On pourra encore déduire cette autre Proportion; AB + BC . AB :: AD + DF . AD, ou bien AC . AB :: AF . AD; & en alternant, (n°. 250.) AC . AF :: AB . AD; c'est-à-dire en général, que les deux côtés d'un Triangle, coupés par une ligne parallèle au troisième côté, sont entr'eux comme leurs parties correspondantes.

COROLLAIRE II.

281. Ne tirons que la diagonale DC; (*fig.* 68.) & supposons que l'angle ADC soit coupé en deux parties égales par la parallèle BD, (ce qui est toujours possible : car après avoir coupé l'angle ADC en deux parties égales x, y, par la ligne BD, on tirera par le point C une parallèle CF à la ligne BD, & prolongeant le côté AD jusqu'à la rencontre de la parallèle CF, on aura une figure semblable à celle de la Proposition 21.) dans ce cas, $x = s$, (à cause du parallélisme des lignes BD, CF; & $y = t$ son angle alterne : mais (supp.) $x = y$; donc $s = t$: ainsi le Triangle DCF est isocèle (n°. 80.); donc DC = DF; par conséquent dans la Proportion AB . BC :: AD . DF, en mettant DC en la place de DF, elle deviendra AB . BC :: AD . DC, ou AD . DC :: AB . BC, ou AD . AB :: DC . BC.

C'est-à-dire, que si l'on coupe un angle quelconque ADC d'un Triangle en deux parties égales, la base AC de cet angle sera coupée en deux segments AB, BC, proportionnels aux deux côtés AD, DC, qui forment cet angle.

Réciproquement, si la base AC de l'angle

ADC est coupée en deux segments, AB, BC, proportionnels aux côtés AD, DC, de l'angle ADC, ou, si l'on a la proportion AB . BC :: AD . DC, en tirant une ligne de D en B, elle coupera nécessairement l'angle ADC en deux parties égales x, y.

DÉMONSTRATION.

Que l'on prolonge AD, jusqu'à ce qu'elle rencontre CF, menée parallèlement à DB par le point C, & l'on aura (279.) AB . BC :: AD . DF : or (supp.) AB . BC :: AD . DC ; donc AD . DF :: AD . DC ; donc DF = DC ; donc l'angle $t = s$: mais $y = t$ (son alterne) $= s$, (comme on vient de le voir) $= x$ (à cause de DB parallèle à CF) ; ainsi $y = x$; C. Q. F. D.

On doit faire attention à ce Corollaire ; nous en ferons usage.

COROLLAIRE III.

282. En comparant le Triangle ABD avec le Triangle BDC, (*fig.* 68.) si le côté AD est plus petit que le côté DC, l'angle g sera plus petit que l'angle A ; parce que, dans un Triangle quelconque ADC, un plus petit côté est opposé à un plus petit angle (n°. 82.). Cependant l'angle x d'une part = l'angle y d'autre part, & les côtés AD, AB, autour de l'angle A, sont proportionnels aux côtés DC, BC de l'angle $g < A$. Deux Triangles ABD, BCD, peuvent donc avoir un angle égal, & des côtés autour d'un autre angle proportionnels, sans être pour cela des Triangles équiangles (*a*).

(*a*) Les Triangles équiangles sont ceux dont tous les angles sont égaux, chacun à chacun.

PROPOSITION XXII.

283. Les Trianglee équiangles A B C, *o b s*; ont leurs côtés proportionnels. (*fig.* 69.)

On suppose donc que l'angle B = l'angle *b*, que A = *o*, & que C = *s*. De cette supposition il en faut conclure, que deux côtés d'une part forment une proportion avec deux autres côtés de l'autre part, pourvû qu'ils soient opposés aux mêmes angles que les deux premiers côtés, c'est-à-dire, que l'on aura B A . *b o* : : B C . *b s* : : A C . *o s*.

DÉMONSTRATION.

On suppose que les côtés du Triangle A B C sont plus grands que les côtés du Triangle *o b s* : on pourra donc prendre sur le côté B A une partie B O égale au côté *b o* du petit Triangle *o b s*; & sur l'autre côté B C une partie B S égale au côté *b s* du même Triangle *o b s*; après cela, joignant les points O, S par la ligne O S, il est clair (à cause de l'angle *b* = B) que le Triangle B O S, pris sur le grand Triangle B A C, a tous ses côtés, & tous ses angles égaux à ceux du Triangle séparé *b o s*. L'angle B O S est donc égal à l'angle B A C; ainsi les deux lignes O S, A C, sont également inclinées sur la même ligne A B; & O S est parallèle à A C : or (*Prop.* 21. n°. 279.) une ligne qui coupe deux côtés d'un Triangle parallèlement à son troisième côté, coupe ces côtés en parties proportionnelles. Donc B O . O A : : B S . S C; ainsi B O + O A . B O : : B S + S C . B S; c'est-à-dire, B A . B O : : B C . B S; C. Q. F. 1°. D.

On démontrera de même que B C . *b s* : : A C . *o s* : car prenant, comme ci-dessus, sur le grand Triangle B A C le petit Triangle *b* C *o*, égal au Triangle

Triangle séparé *bso*, (*fig.* 70.) (ce qui est possible, puisque l'on suppose l'angle C d'une part, égal à l'angle *s* de l'autre part,) on verra que le petit Triangle *b*C*o* a tous ses angles égaux, chacun à chacun, à tous les angles du Triangle BCA; ainsi l'angle C*bo* = l'angle CBA; & par conséquent les lignes *bo*, BA, sont également inclinées sur la même ligne BC; donc *bo* est parallèle à BA, & l'on a (n°. 279. & 280.) BC *b*C ou *bs* :: CA. C*o* ou *so*; C.Q.F.2°.D.

Réciproquement, si les côtés du Triangle BAC (*fig.* 69.) sont proportionnels aux côtés du Triangle *bos*, ces Triangles sont nécessairement équiangles; c'est-à-dire, que les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre, chacun à chacun: on suppose donc que BA. *bo* :: BC. *bs* :: CA. *so*; & il en faut conclure, que les angles du Triangle BAC sont égaux aux angles du Triangle *bos*, chacun à chacun.

DÉMONSTRATION.

Prenez sur le grand côté BA la partie BO = le côté *bo*, & sur l'autre côté BC, la partie BS = le côté *bs* du petit Triangle *bos*; tirez enfin la ligne OS, & considérez que les côtés BA, BC du Triangle BAC, étant coupés proportionnellement par la ligne OS, à cause que l'on suppose la proportion BA. BO :: BC. BS, il s'ensuit (par la conv. de la Prop. 21. n°. 269.) que la ligne OS est parallèle à la ligne AC, & par conséquent le Triangle BOS est équiangle au Triangle BAC; mais si l'on démontre que le Triangle BOS est égal en tout au Triangle *bos*, on aura démontré que le petit Triangle *bos* est aussi équiangle au grand Triangle BAC: or l'on sçait déja que les deux côtés BO, BS du Triangle BOS, sont égaux aux deux côtés *bo*, *bs* du

Triangle *bos*; reste donc à démontrer que le troisième côté OS de l'un est égal au troisième côté *os* de l'autre.

Les deux Triangles BAC, BOS; étant équiangles, on a BC . BS :: CA . SO; mais (par la supp.) BC . *bs* :: CA . *so*; donc CA . SO :: CA . *so*, ou CA . CA :: SO . *so*: or CA = CA; par conséquent le côté SO du Triangle BOS est égal au côté *so* de l'autre Triangle *bos*; le Triangle BOS est donc égal en tout au Triangle *bos*; par conséquent, comme le Triangle BOS est équiangle au Triangle BAC, il s'ensuit que le petit Triangle *bos* est aussi équiangle au grand Triangle BAC; donc les Triangles qui ont leurs côtés proportionnels, sont des Triangles équiangles; C. Q. F. D.

Cette Proposition est célèbre dans la Géométrie; nous allons la retrouver partout à mesure que nous avancerons: on doit se la rendre très-familière, afin de n'être point arrêté par la suite des conclusions que l'on en déduit avec une extrême facilité; conclusions sur lesquelles va rouler dorénavant le reste de notre Géométrie, qui n'en sera, pour ainsi dire, qu'un Corollaire continué.

On appelle *Triangles semblables* (*a*) les Triangles équiangles; c'est pourquoi les Triangles semblables ont leurs côtés proportionnels.

COROLLAIRE I.

284. Si l'angle B d'un Triangle ABC est égal

(*a*) On observera que les Triangles sont les seules figures qui soient semblables, dès qu'on les suppose équiangles. Les figures qui ont plus de trois côtés, peuvent être équiangles sans être semblables; parce que, outre l'égalité des angles, il est encore nécessaire que les côtés de ces figures soient proportionnels, afin que l'on puisse assûrer qu'elles sont semblables: or les figures qui ont plus de trois côtés, peuvent être équiangles, sans avoir leurs cotés proportionnels; & réciproquement elles peuvent avoir leurs côtés proportionnels, sans être équiangles, comme on le verra plus bas.

à l'angle *b* d'un autre Triangle *bos*, & que de plus les côtés BA, BC, qui sont autour du premier angle, soient proportionnels aux côtés *bo*, *bs*, qui sont autour du second angle, il est certain que ces deux Triangles sont semblables; ou, ce qui est la même chose, que ces deux Triangles sont équiangles. (*fig.* 69.)

DÉMONSTRATION.

Puisque l'angle B est égal à l'angle *b*, on pourra transporter l'angle *obs* sur l'angle ABC, pour avoir le Triangle BOS égal en tout au Triangle *bos*, en prenant la partie BO égale au côté *bo*, & la partie BS égale au côté *bs*. Cela fait, on aura (par la supposition) BA . BO ou *bo* : : BC . BS ou *bs*; donc (par la conv. de la Prop. 21. n°. 269.) la ligne OS est parallèle au côté AC. Ainsi le Triangle BOS ou *bos* est équiangle au Triangle BAC; & par conséquent deux Triangles sont semblables, quand ils ont leurs côtés proportionnels autour du même angle; C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

285. Deux Triangles sont semblables, quand deux angles de l'un sont égaux à deux angles de l'autre, chacun à chacun.

Car deux Triangles qui ont deux angles égaux chacun à chacun, ont le troisième angle d'une part égal au troisième angle de l'autre part; & par conséquent ces Triangles sont équiangles; donc ces Triangles sont semblables (n°. 283.); C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

286. Si les deux Triangles DBC, *dbc* (*fig.* 71.), qui ont les angles C, *c*, égaux, & les côtés autour

des angles B, *b*, proportionnels, ont encore les angles D, *d*, de même espèce, c'est-à-dire, tous deux obtus ou tous deux aigus; il faut nécessairement conclure que les angles B, *b*, compris entre les côtés proportionnels, sont égaux; & par conséquent que ces deux Triangles sont semblables.

DÉMONSTRATION.

Si l'on veut que l'un de ces deux angles soit plus grand que l'autre, par exemple, que B soit plus grand que *b*, retranchons de l'angle B l'angle SBC $= b$; alors les deux Triangles SBC, *dbc*, seront équiangles, puisque $C = c$, & que l'angle SBC $= dbc$; donc le troisième angle BSC sera égal au troisième angle *d*, & par conséquent les deux angles BSC & D seront de même espèce; & de plus, comme les Triangles SBC, *dbc* sont équiangles, on aura BC . BS :: *bc* . *bd*; mais (par la supposition) *bc* . *bd* :: BC . BD; donc BC . BS :: BC . BD, & en alternant, BC . BC :: BS . BD: or $BC = BC$; donc $BS = BD$, & le Triangle DSB est isoscèle; donc les angles opposés aux côtés égaux, sont égaux: ainsi l'angle DSB est égal à l'angle D, que nous avons déja démontré être de même espèce que l'angle BSC; par conséquent les trois angles D, DSB, BSC seroient de même espèce, ce qui est impossible: car il est évident que ces trois angles ne sçauroient être en même tems ou tous trois aigus, ou tous trois obtus, ou enfin tous trois des angles droits; par conséquent il est aussi impossible que les Triangles DBC, *dbc*, ne soient pas des Triangles semblables; C. Q. F. D.

PROPOSITION XXIII.

287. Si d'un même point A (*fig.* 72.) pris en dehors ou en dedans d'un cercle, on tire deux lignes

AB, AF, dont chacune prolongée, s'il le faut, rencontre la circonférence en deux points, je dis, 1°. Si le point A est en dedans du cercle, que les parties de l'une sont réciproquement proportionnelles aux parties de l'autre; & que, 2°. Si le point A est pris hors du cercle, les lignes entières sont réciproquement proportionnelles aux parties qui sont hors du cercle.

C'est la même Démonstration pour les deux cas; mais, pour éviter la confusion, on appliquera la Démonstration à l'une des deux figures, & ensuite à l'autre. Il s'agit donc de démontrer que AB. AF :: AC. AD.

DÉMONSTRATION.

Tirez les lignes BC, DF, & remarquez que le Triangle CAB est équiangle au Triangle DAF: car, 1°. l'angle A = l'angle A, commun à l'un & l'autre Triangle, ou bien opposé par le sommet, (n°. 45.) selon que l'on prendra l'une ou l'autre figure. 2°. L'angle F = l'angle B, puisque ces deux angles ayant leur sommet à la circonférence du cercle, ont pour mesure la moitié du même arc CD, qui passe entre leurs côtés (n°. 104.); donc le troisième angle ADF est égal au troisième angle ACB (n°. 78.); par conséquent les deux Triangles CAB, DAF, sont équiangles; donc ces Triangles ont leurs côtés proportionnels (Proposition 22. n°. 283.) c'est-à-dire, que les côtés opposés à des angles égaux de part & d'autre, forment une proportion; par conséquent AB. AF :: AC. AD; C. Q. F. D.

REMARQUE.

Pour reconnoître facilement l'arrangement des côtés qui forment une proportion, à mesure que

l'on reconnoît l'égalité des angles dans les Triangles que l'on compare, il faut marquer les angles égaux de part & d'autre par des signes semblables : ainsi nous avons marqué les angles égaux F, B, par un point mis au dedans de ces angles vers leur sommet ; de même les angles égaux A C B, A D F, ont été désignés par un même petit arc décrit de leur sommet. Quand on a pris cette précaution, il est très-facile d'arranger, comme il faut, les termes de la proportion : car si vous la commencez par le côté A B du Triangle C A B, observez à quel angle ce côté est opposé : c'est à l'angle A C B ; cherchez donc dans l'autre Triangle D A F, l'angle A D F égal à l'angle A C B ; & le côté A F opposé à l'angle A D F, sera le second terme de la proportion : revenant ensuite au premier Triangle C A B, on en prendra le côté A C, opposé à l'angle B, pour être le troisième terme de la proportion, & par conséquent le côté A D du Triangle D A F sera le quatrième, puisque ce côté est opposé à l'angle F = B. En tenant toujours cette conduite, on ne se trompera jamais dans l'arrangement des côtés des Triangles équiangles qui forment une proportion.

La converse de cette Proposition est vraie, c'est-à-dire, si deux lignes qui se croisent au point A, sont telles que les parties de l'une AB, AD (*fig.* 73.) soient réciproquement proportionnelles aux parties A C, A F de l'autre : je dis que les extrémités C, D, F, B de ces lignes, sont nécessairement dans la circonférence d'un même cercle ; ensorte qu'en faisant passer une circonférence de cercle par trois de ces points pris à liberté, elle passera nécessairement par le quatrième point.

On suppose donc que A C . A D :: A B . A F ; d'où l'on se propose de conclure, que la circonféren-

ce qui passeroit par les trois points C, B, D, passeroit aussi nécessairement par le quatrième point F.

DÉMONSTRATION.

Si la circonférence que l'on feroit passer par les trois points C, B, D, ne passoit pas par le quatrième point F, elle passeroit ou au-delà ou en-deçà du point F par rapport au point A; mais nous allons faire voir qu'il est impossible qu'une pareille circonférence passe en-deçà ou au-delà du point F; ce sera donc une nécessité qu'elle passe par le point F. Supposons pour un moment qu'elle passe par le point G en-deçà de F. Suivant ce que l'on vient de démontrer, on auroit AC . AD :: AB . AG; mais (par la supposition) l'on a AC . AD :: AB . AF; & par conséquent AG égaleroit AF, puisque ces deux lignes seroient une quatrième proportionnelle aux trois mêmes grandeurs AC, AD, AB: or il est impossible que AG soit égale à AF, une partie ne pouvant pas être égale à son tout. Donc aussi il est impossible que la circonférence supposée passe en-deçà de F. On prouvera précisément de la même manière, que cette circonférence ne passera pas en un point quelconque G au-delà de F. Elle passera donc nécessairement par le point F; C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

288. Si du même point pris hors d'un cercle, on tire une sécante AF & une tangente AD (*fig.* 74.) cette tangente sera moyenne proportionnelle entre la sécante entière AF & sa partie AC hors du cercle. Il s'agit donc de prouver que AF . AD :: AD . AC.

DÉMONSTRATION.

Supposons d'abord que ADB soit une sécante :

on a (par la Prop. 23.) A F . A B :: A D . A C. Représentons-nous maintenant que la sécante A D B tende à devenir la tangente A D ; plus elle approchera d'être la tangente A D, plus les points D, B, d'intersection seront proches l'un de l'autre, & ils se confondront totalement à l'instant que A D B deviendra la tangente A D : alors la sécante entière A B ne sera pas différente de sa partie A D hors du cercle ; par conséquent, dans la proportion A F . A B :: A D . A C, mettant A D au lieu de A B = A D, la proportion deviendra A F . A D :: A D . A C, c'est-à-dire, que la tangente A D est moyenne proportionnelle entre la sécante entière & sa partie hors du cercle ; C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

On peut tirer de-là une nouvelle Démonstration assez simple, que le quarré de l'hypothénuse dans un Triangle A B C, Réctangle en A (*Fig. M. PL.* 7.) est égal à la somme des quarrés faits sur les deux autres côtés A C, A B.

Car du point C, avec l'un des côtés A C, qui forment l'angle droit, décrivant une circonférence, & prolongeant l'hypothènuse B C jusqu'à sa rencontre D avec cette circonférence, si l'on fait B C $= h$, A B $= t$, A C $=$ C D $=$ O C $= r$, on aura B D $=$ B C $+$ C D $= h + r$, & B O $=$ B C $-$ O C $= h - r$; donc, puisque B D . A B :: A B . B O (288.), c'est-à-dire, $h + r . t :: t . h - r$, on trouvera $\overline{h + r} \times \overline{h - r}$, ou $hh - rr = tt$: ainsi (en transposant $- rr$) $hh = tt + rr$; C. Q. F. D.

Il arrive très-souvent dans la pratique des Arts, que l'on est obligé de faire rouler des cilindres, des essieux ou des axes les uns sur les autres ; il faut

alors éviter le frottement le plus qu'il est possible : or en faisant tourner un essieu cilindrique entre trois cilindres, dont l'un en creux le retiendra sur les deux autres qui lui serviront d'appui, on aura très-peu de frottement, puisqu'il n'aura lieu qu'en trois points, ainsi que le montre *la Fig. L. de la P L.* 7.

Mais quel doit être le diamètre du cercle H, pour être logé entre les trois cercles A T N, A R C, C G N, de manière qu'il les touche tous trois en même tems ? Le Corollaire que nous venons de démontrer, va nous servir à la résolution de ce Problême.

Mais pour une plus parfaite intelligence de cette question, il est à propos de faire voir, 1°. que deux ou plusieurs cercles, dont les diamètres commencent en un même point C ou G, sur une même ligne AG (*Fig. T. P L.* 8.), ne se touchent qu'en un point unique ; soit que leurs convéxités se rencontrent, comme il arrive aux cercles A S C, C S G ; soit que la convéxité de l'un rencontre la concavité de l'autre, tels que sont les cercles C S G, L G H.

DÉMONSTRATION.

Si les deux cercles A S C, C S G, se rencontroient en quelqu'autre point S, différent de C, en menant les rayons B S, F S, l'on auroit (à cause de B C = B S & de C F = S F) B C + C F = B S + S F, c'est-à-dire, B F = B S F ; ce qui est visiblement absurde.

Pareillement, les deux cercles C S G, L G H, dont F, D, sont les centres, ne peuvent se rencontrer en quelque point M, différent de G ; autrement l'on auroit F G = F M ; donc D F + F G = D F + F M ; mais D F + F G, c'est-à-dire D G, étant le rayon du cercle L G H (supp.), seroit égal à D M, aussi rayon du même

cercle ; donc $DF + FM$ égaleroit DM ; ce qui est encore absurde.

D'où il s'ensuit qu'en joignant par une ligne droite les centres B, F, des deux cercles ASC, CSG qui se touchent, cette ligne BF passera nécessairement par leur point de contingence C. Car en prenant une autre route, telle que BSF, le point S n'étant pas commun aux deux circonférences, comme on vient de voir, $BS + SF$ feroit plus longue que $BC + CF$, c'est à-dire, qu'alors la ligne droite, menée de B en F, ne passeroit pas par le plus court chemin ; ce qui est impossible.

PROBLÊME

Étant donnés les trois cercles ATN, ARC, CGN, qui se touchent réciproquement par les extrémités A, C, N, de leurs diamètres, (& que je suppose être les profils de trois cilindres) en trouver un quatrième H, qui touche en même tems les trois premiers (*fig. L. PL. 7.*).

RÉSOLUTION.

Les deux cercles ARC, CGN étant égaux, parce que je fais $AC = CN$, il est clair que le centre H du cercle cherché doit se trouver sur le rayon CT, élevé perpendiculairement sur le milieu C du diamètre AN. Il s'agit donc de déterminer la longueur du rayon cherché TH.

Menons BH, qui passera nécessairement par le point de contingence R, comme étant évidemment le plus court chemin ; & soit $AC = CT = CN = 2a$, $BC = BR = a$, $TH = RH = x$, on aura $CH = CT - TH = 2a - x$, & $BH = BR + RH = a + x$: alors le Triangle Réctangle CBH donnera (Cor. 2. du

n°. 288.) $\overline{BH}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CH}^2$, ou $aa + 2ax + xx = aa + 4aa - 4ax + xx$; ou (en ôtant de part & d'autre $aa + xx$, & en transposant $- 4ax$) $6ax = 4aa$; donc $x = \frac{4aa}{6a} = \frac{2a}{3}$; ce qui signifie que le rayon T H ou x du cercle cherché, doit être égal au tiers du rayon CT $= 2a$. Ainsi, pour résoudre pratiquement ce Problême, au centre & sur le diamètre AN du cercle enveloppant ATN, on élèvera perpendiculairement le rayon CT; on en portera le tiers de T en H, & du centre H avec HT, on décrira le cercle RTH, qui touchera les trois cercles proposés.

J'ai dit que la ligne droite, menée de B en H, passoit nécessairement par le point R de contingence, étant clair que si elle n'y passoit pas, elle contiendroit plus que la somme des rayons BR, RH, & par conséquent ne seroit pas, comme elle doit être, le plus court chemin de B en H.

PROPOSITION XXIV.

289. Une perpendiculaire DA (*fig.* 75.) abbaissée d'un point D quelconque de la circonférence d'un cercle sur son diamètre CF, est moyenne proportionnelle entre les parties CA, AF de ce diamètre. Il faut donc démontrer que CA. DA :: DA. AF.

DÉMONSTRATION.

Prolongez la perpendiculaire DA jusqu'à ce quelle coupe la circonférence en un point B, & rappellez-vous qu'un rayon tel que OC perpendiculaire sur une corde DB, coupe nécessairement cette corde en deux parties égales (n°. 122.): ainsi

DA = AB; mais, par la Proposition précédente, AC. AD :: AB. AF; donc, mettant dans cette proportion DA au lieu de AB qui lui est égale, elle deviendra CA. DA :: DA. AF. Ce qui fait voir que DA est moyenne proportionnelle entre les parties CA, AF du diamètre; C. Q. F. D.

La converse de cette Proposition est fausse; c'est-à-dire, il est faux qu'une ligne moyenne proportionnelle entre les parties CA, AF qu'elle coupe sur un diamètre, soit nécessairement une perpendiculaire abbaissée d'un point quelconque de la circonférence à laquelle ce diamètre appartient.

DÉMONSTRATION.

Du point A de la perpendiculaire DA tirez AG = AD (*fig.* 76.): AG ne pourra pas être une perpendiculaire sur le diamètre CF; & cependant cette ligne AG sera moyenne proportionnelle entre les parties CA, AF, qu'elle coupe sur le diamètre CF, puisque la perpendiculaire DA étant moyenne proportionnelle entre ces parties, son égale AG le sera aussi; C. Q. F. D.

PROPOSITION XXV.

290. En supposant toujours la perpendiculaire DA sur le diamètre CF (*fig.* 77.), du point D tirez les lignes DC, DF aux extrémités C, F de ce diamètre; les Triangles DCA, DFA seront semblables ou équiangles: ils seront aussi semblables au grand Triangle CDF.

DÉMONSTRATION.

1°. Par la suppposition, l'angle x = l'angle y, puisque DA est perpendiculaire; & par la Proposition précédente, CA. DA :: DA. AF, c'est-

à-dire, que les Triangles D C A, D F A, ont leurs côtés proportionnels autour d'un même angle: or il a été démontré (n°. 284.) que dans ce cas les Triangles étoient équiangles; par conséquent les Triangles D C A, D F A sont semblables; C. Q. F. 1°. D.

2°. Le grand Triangle C D F est semblable au petit Triangle D C A: car ces deux Triangles ont d'abord l'angle commun C; en second lieu, ils ont chacun un angle droit, puisque l'angle *x* du petit Triangle est droit (par la supposition), & que l'angle C D F du grand Triangle est aussi droit, parce qu'un angle à la circonférence, qui s'appuye sur le diamètre, est un angle droit (n°. 104.): voilà donc deux angles d'une part égaux à deux angles de l'autre part, chacun à chacun; donc le troisième angle C D A du petit Triangle est égal au troisième angle C F D du grand Triangle; par conséquent le grand Triangle C D F est équiangle au petit Triangle D C A: ces deux Triangles sont donc semblables; C. Q. F. 2°. D.

3°. Le grand Triangle C D F est aussi semblable à l'autre petit Triangle D F A: car le petit Triangle D F A étant, par la première partie de cette proposition, semblable au petit Triangle D C A, que l'on vient de démontrer être semblable au grand Triangle C D F, c'est une nécessité que deux Triangles semblables à un troisième, soient semblables entr'eux; par conséquent le grand Triangle C D F est semblable au petit Triangle D F A; C. Q. F. 3°. D.

Vous pouvez démontrer autrement que le grand Triangle C D F est semblable au petit Triangle D F A: car, 1°. Ces deux Triangles ont l'angle F commun. 2°. Ils ont chacun un angle droit, puisque (par la supp.) l'angle *y* du petit Triangle

DFA est droit, & que l'angle CDF du grand Triangle est aussi un angle droit, comme il a été démontré ; ainsi le troisième angle FDA du petit Triangle est égal au troisième angle DCF du grand Triangle. Ces deux Triangles sont donc équiangles, & par conséquent ils sont semblables.

Afin que l'on reconnoisse quels sont les angles égaux qui se répondent dans les deux Triangles semblables DCA, DFA, il faut marquer les angles correspondans par des signes semblables, comme j'en ai déja averti. Je le répète ici, parce que cela nous donne un moyen très-commode de comparer les côtés proportionnels des Triangles semblables.

La converse de la Proposition 25 n'est d'aucune utilité.

REMARQUE.

291. Le Triangle CDF est donc un Triangle Réctangle, dont le diamètre CF est l'hypothénuse, & la ligne DA est une perpendiculaire abbaissée de l'angle droit sur l'hypothénuse. On voit donc que si de l'angle droit d'un Triangle Réctangle on abbaisse une perpendiculaire sur l'hypothénuse, non-seulement cette perpendiculaire est moyenne proportionnelle entre les parties de l'hypothénuse ; mais qu'elle divise encore le grand Triangle en deux petits Triangles semblables au grand Triangle & semblables entr'eux. On doit bien retenir cette Remarque.

PROPOSITION XXVI.

292. Si de l'angle droit D d'un Triangle Réctangle (*fig.* 77.) l'on abbaisse une perpendiculaire DA sur l'hypothénuse CF, je dis que chaque côté du Triangle devient une moyenne proportionnelle entre l'hypothénuse CF, & le segment qui répond

à ce côté ; c'est-à-dire, que l'on aura, 1°. CF. CD :: CD. CA ; 2°. CF. DF :: DF. AF.

DÉMONSTRATION.

1°. Suivant la Proposition 25 & le n°. 291 ; le grand Triangle CDF est semblable au petit Triangle CDA ; par conséquent les côtés, opposés à des angles égaux, forment une proportion. Donc CF du grand Triangle, opposé à l'angle droit CDF, est à CD, opposé à l'angle droit A du petit Triangle, comme CD, opposé à l'angle F du grand Triangle, est à CA opposé à l'angle CDA = F, ou plus simplement CF. CD :: CD. CA ; C. Q. F. 1°. D.

2°. Par la même Proposition 25 & le n°. 291, le grand Triangle CDF est semblable au petit Triangle DFA ; donc les côtés de ces Triangles sont en proportion. Par conséquent CF. DF :: DF. AF ; C. Q. F. 2°. D.

La converse de cette Proposition est vraie ; c'est-à-dire que, si les côtés CD, DF d'un Triangle Réctangle CDF deviennent moyens proportionnels entre l'hypothénuse entière, & les segmens correspondans, faits par une ligne abbaissée du sommet de l'angle droit, cette ligne sera nécessairement perpendiculaire sur l'hypothénuse. (*fig.* 77.)

Il faut donc démontrer que, si l'on a, par exemple, CF. DF :: DF. AF, on aura nécessairement les Triangles CDF, DFA, équiangles.

DÉMONSTRATION.

1°. Les Triangles CDF, DFA ont l'angle F commun. 2°. Ils ont les côtés autour de ce même angle proportionnels : car c'est l'hypothèse. Or, (par le Corollaire 1. de la Prop. 22. n°. 284.) si un angle d'un Triangle est égal à un angle d'un autre

Triangle, & que de plus les côtés qui sont autour du premier angle, soient proportionnels aux côtés qui sont autour du second, ces deux Triangles sont nécessairement semblables, ou, ce qui est la même chose, leurs angles opposés aux côtés proportionnels sont égaux; donc, puisque les deux Triangles CDF, DFA ont ces propriétés, il faut que les angles qui sont opposés à leurs côtés proportionnels soient égaux; donc l'angle DAF opposé à DF, est égal à l'angle CDF opposé à CF; mais (par la supp.) l'angle CDF est droit; donc l'angle DAF est aussi un angle droit: ainsi DA est une perpendiculaire; C. Q. F. D.

D'où l'on peut déduire une démonstration du quarré de l'hypothénuse.

PROPOSITION XXVII.

293. Le quarré CBSF (*fig.* 78.) fait sur l'hypothénuse CF du Triangle CDF Réctangle en D, est égal à la somme des quarrés CDLM, DFPT, construits sur les deux autres côtés.

Afin d'abréger le discours, j'appellerai $\overline{CF}^2$ le quarré fait sur CF; $\overline{CD}^2$ sera aussi l'expression du quarré fait sur le côté CD; & $\overline{DF}^2$ désignera le quarré fait sur le côté DF.

Il faut donc prouver que $\overline{CF}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DF}^2$.

DÉMONSTRATION.

De l'angle droit D abbaissez sur l'hypothénuse la perpendiculaire DA, que vous prolongerez jusqu'au point O, afin qu'elle partage le quarré $\overline{CF}^2$ en deux Réctangles CBOA, AOSF. Or si l'on démontre que le Réctangle CBOA $= \overline{CD}^2$, & que le Réctangle AOSF $= \overline{DF}^2$, on aura aussi démontré

démontré que le quarré $\overline{CF}^2$, qui vaut ces deux Réctangles, est aussi égal aux quarrés $\overline{CD}^2$, $\overline{DF}^2$, pris ensemble.

Mais (par la Prop. 26.) on a CF . CD :: CD : CA. Donc $CA \times CF$, ou $CA \times CB = CD \times CD = \overline{CD}^2$. L'on a encore (par la même Prop.) CF : DF :: DF : AF. Donc $AF \times CF$, ou $AF \times AO = \overline{DF}^2$.

Or $CA \times CB$ est la valeur du Réctangle CBOA; & $AF \times AO$ est celle du Réctangle AOSF (n°. 165.); par conséquent, puisque $CA \times CB = \overline{CD}^2$, le Réctangle CBOA est égal au quarré fait sur CD; & comme aussi $AF \times AO = \overline{DF}^2$, on voit que le Réctangle AOSF est égal au quarré fait sur DF. Par conséquent la somme des Réctangles AOSF, CBOA, est égale à la somme des quarrés $\overline{CD}^2$, $\overline{DF}^2$: mais le quarré $\overline{CF}^2$ de l'hypothénuse est égal à la somme des deux Réctangles; donc il est aussi égal à la somme des deux quarrés; c'est-à-dire, que $\overline{CF}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DF}^2$; C. Q. F. D. (a)

(a) On attribue cette découverte à Pithagore, qui fit, dit-on, en reconnoissance un hécatombe, ou un sacrifice de cent bœufs aux Muses.

Quand on a seulement parcouru les différentes parties des Mathématiques, il faut convenir que cette Proposition est d'un grand secours.

Mais comment Pithagore a-t-il vû les avantages qui devoient en résulter? Avoit-il trouvé auparavant un grand nombre de Propositions fondées sur celle-ci, & qui n'attendoient que cette découverte pour être mises elles-mêmes au nombre des grandes découvertes? L'Histoire n'en dit rien.

J'ai lû quelque part qu'elle lui avoit beaucoup servi à perfectionner l'Arithmétique: je la crois très-peu nécessaire à cet objet. Il m'a toujours paru bisarre que l'on démontrât l'Arithmétique par la Géométrie: on tombe non seulement dans un cercle vicieux, puisque la Géométrie a nécessairement besoin de l'Arithmétique; mais encore on renonce par-là à une déduction parfaite, à cette génération de vérités qui doivent toutes procéder du même principe, autant que cela est possible: or en appliquant à l'Arithmétique les principes de

La converse de cette Proposition est vraie ; elle a été démontrée (n°. 189.)

COROLLAIRE I.

294. Puisque $\overline{CF}^2$, ou $CF \times CF = \overline{CD}^2 + \overline{DF}^2$ (*fig.* 78.) ; donc en tirant la racine quarrée de l'un & de l'autre membre, on aura $CF = \sqrt{\overline{CD}^2 + \overline{DF}^2}$ (*a*) ; c'est-à-dire que, si l'on connoît les deux côtés qui forment un angle droit, on aura la longueur de l'hypothénuse, en tirant la racine quarrée de la somme des quarrés des deux côtés connus.

la Géométrie, on change d'objet ; les conclusions ne sont plus tirées d'un seul principe, à moins qu'on ne veuille dire qu'il seroit beaucoup mieux de commencer par la Géométrie, pour passer à l'Arithmétique ; ce qui n'est pas soutenable ; l'expérience & le bon sens renversent cette prétention.

Je conçois facilement la grande sensibilité de Pithagore à l'instant de sa découverte ; elle lui rendoit un témoignage non équivoque de la force de son génie. Voilà pourquoi ceux qui ont une fois goûté des Mathématiques, poursuivent avec tant de chaleur les objets de leurs spéculations.

Mais la reconnoissance de Pithagore me paroît extrême : car il y a bien d'autres vérités en Géométrie plus sublimes & plus utiles, dont les Inventeurs ne se sont pas livrés à des transports si marqués. Telles sont celles qui enseignent que *les trois angles d'un Triangle sont égaux à deux angles droits* : Que *les Triangles semblables ont leurs côtés proportionnels* ; & celles par où l'on résout tous les Problêmes de la *Trigonométrie* moyennant les *sinus*.

(*a*) Presque tous les Commençans sont portés à croire que la racine quarrée de la somme de deux quarrés est égale à la somme des racines des deux quarrés ; ils s'imaginent, par exemple, que la racine quarrée des deux quarrés $aa + bb$, pris ensemble, est égale à la somme $a + b$ des racines de chaque quarré.

C'est une pensée, dont ils reconnoîtront facilement l'erreur, s'ils réfléchissent qu'une racine quarrée multipliée par elle-même doit produire le quarré dont elle est racine. Or en multipliant $a + b$ par $a + b$, le produit est $aa + 2ab + bb$; & non pas $aa + bb$, comme les premières apparences semblent l'annoncer. On est si peu accoutumé à des idées précises dans l'usage ordinaire de la vie, que l'on regarde souvent comme des vérités fort naturelles, les faussetés les plus avérées ; & c'est une des principales raisons qui ont déterminé les Mathématiciens à démontrer ce qui ne paroît pas avoir besoin de démonstration.

COROLLAIRE II.

295. En supposant toujours $\overline{CF}^2$, ou $CF \times CF = \overline{CD}^2 + \overline{DF}^2$, on aura $\overline{CF}^2 - \overline{CD}^2 = \overline{DF}^2$, ou $\overline{CF}^2 - \overline{DF}^2 = \overline{CD}^2$, & par conséquent $DF = \sqrt[2]{\overline{CF}^2 - \overline{CD}^2}$, ou $CD = \sqrt[2]{\overline{CF}^2 - \overline{DF}^2}$; ce qui veut dire qu'en connoissant l'hypothénuse & l'un des côtés, on trouvera l'autre côté, si l'on extrait la racine quarrée de la différence qu'il y aura entre le quarré de l'hypothénuse, & le quarré du côté connu.

COROLLAIRE III.

Il s'ensuit encore que la Diagonale LC d'un quarré (*fig.* 78.) est incommensurable avec l'un de ses côtés MC; c'est-à-dire, qu'en prenant une grandeur quelconque, qui mesure éxactement le côté MC, cette grandeur ne mesurera pas éxactement la Diagonale LC: il y aura toujours de l'excès ou du défaut; & l'on ne pourra pas déterminer le rapport numérique de cet excès ou de ce défaut à la grandeur qui aura servi de mesure.

DÉMONSTRATION.

Car (293.) $\overline{LC}^2 = \overline{ML}^2 + \overline{MC}^2 = 2\overline{MC}^2$; (puisque $ML = MC$): ainsi en tirant des racines quarrées, $LC = \sqrt[2]{2\overline{MC}^2}$; quantité inassignable à toute rigueur, $2\overline{MC}^2$ n'étant pas un quarré parfait. Par éxemple, si l'on suppose MC long de 1 pied, on ne pourra pas déterminer précisé-

ment la partie numérique que la Diagonale LC contiendra au-dessus d'un pied : car alors LC $= \sqrt[2]{2}$ pieds quarrés ; mais il est impossible de trouver en nombres précis la racine quarrée de 2. Donc, &c. C. Q. F. D.

Ainsi, quoique l'on puisse trouver la longueur de la racine quarrée de deux pieds quarrés, on ne peut pas sçavoir son rapport numérique à 1 pied courant. Il y a donc incommensurabilité entre la Diagonale d'un quarré & son côté.

PROPOSITION XXVIII.

296. Si du sommet D de l'angle obtus d'un Triangle obtusangle, ou de l'angle aigu d'un Triangle acutangle quelconque CDF scalène (*fig.* 79.), on abbaisse une perpendiculaire DA sur le côté opposé CF, il arrivera que le quarré du côté CF, opposé à l'angle D, sera égal à la différence des quarrés des deux autres côtés DF, CD, plus deux fois le Réctangle du côté CF par le petit segment CA.

Supposons DF > DC, afin d'avoir le segment CA < AF. Soit de plus CF $= a$, DF $= b$, DC $= c$, CA $= x$, AF $= a - x$, DA $= y$. Il s'agit de démontrer que $\overline{CF}^2 = \overline{DF}^2 - \overline{CD}^2 + 2\,CF \times CA$; ou, en substituant les valeurs de ces côtés, que $aa = bb - cc + 2ax$.

DÉMONSTRATION.

Remarquez que la perpendiculaire DA divise le Triangle CDF en deux Triangles DAC, DAF, Réctangles en A ; ainsi (par la Prop. précéd.) le quarré du côté DF est égal à la somme des quarrés

faits sur les deux côtés DA, AF; &, en exprimant cette égalité algébriquement, on a cette équation, $bb = aa - 2ax + xx + yy$.

Par la même raison, le quarré du côté CD est égal à la somme des quarrés des côtés DA, CA; ce qui produit cete autre équation, $cc = xx + yy$; par conséquent, en substituant cc en la place de $xx + yy$ dans l'équation précédente, elle sera $bb = aa - 2ax + cc$; donc, en transposant les termes $-2ax + cc$ du second membre de cette équation dans le premier, on aura $bb - cc + 2ax = aa$; C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

297. Par conséquent, si l'on connoît les trois côtés d'un Triangle obtusangle ou acutangle, il sera très-facile de déterminer la valeur de l'un des deux segmens faits par une perpendiculaire, que l'on imagineroit abbaissée de l'angle obtus, ou de l'angle aigu sur le côté opposé à cet angle.

Car en réprenant l'équation précédente $bb - cc + 2ax = aa$, on aura, en transposant, $2ax = aa + cc - bb$; donc $x = \frac{aa + cc - bb}{2a}$; ce qui signifie que le petit segment CA se détermine, en faisant la somme des quarrés du petit côté CD, & du côté CF, sur lequel tombe la perpendiculaire DA, de laquelle somme on doit retrancher le quarré de l'autre côté DF, pour en diviser le reste par le double du côté CF: car le quotient de cette division donne la valeur du petit segment CA.

COROLLAIRE II.

298. On peut donc évaluer un Triangle obtusangle ou acutangle par la seule connoissance de ses trois côtés, puisque après avoir déterminé le petit

ſegment C A (par le Coroll. 1.) que nous pouvons appeller d, le Triangle Réctangle C A D (*fig.* 79.) donne $cc = dd + yy$; donc $yy = cc - dd$; par conséquent $\sqrt{cc - dd} = y$ qui repréſente la perpendiculaire D A, que l'on connoîtra, comme l'on voit, en retranchant le quarré du petit ſegment C A $= d$ du quarré du petit côté D C $= c$, & tirant enſuite la racine quarrée de ce reſte. Or, quand on connoît la baſe & la hauteur d'un Triangle, ſa ſurface eſt connue; donc on peut meſurer un Triangle par la ſeule connoiſſance de ſes trois côtés; ce qui eſt d'un grand ſecours dans la pratique, où il n'eſt pas toujours poſſible d'abbaiſſer des perpendiculaires. Cette vérité a déja été prouvée (n°. 194.): il eſt à remarquer qu'en déterminant le grand ſegment A F, on trouveroit de même la perpendiculaire D A.

COROLLAIRE III.

299. En nous tenant toujours à la ſuppoſition de la Prop. 28, ſi les deux côtés C D, D F ſont égaux, la perpendiculaire D A tombera ſur le milieu du côté C F (*fig.* 79.), & rendra par conſéquent égaux les deux ſegmens de ce côté, ce que l'équation $bb - cc + 2ax = aa$ fait connoître: car, puiſque l'on ſuppoſe $b = c$, l'équation deviendra $2ax = aa$, en effaçant les deux termes $bb - cc$ qui ſe détruiſent; donc $x = \frac{aa}{2a} = \frac{a}{2}$; ainſi le ſegment C A $= x$ ſera égal à la moitié du côté C F $= a$; donc l'autre ſegment ſera égal à l'autre moitié.

300. Mais comment juger par la ſimple connoiſſance des côtés, ſi un Triangle eſt réctangle, obtuſangle ou acutangle (*fig.* 80.)?

Cela est fort aisé : nous avons vû qu'un Triangle CDF réctangle en D, donnoit toujours le quarré de l'hypothénuse égal à la somme des quarrés faits sur les deux autres côtés (n°. 293.) ; mais supposons que l'angle droit CDF vienne à s'ouvrir ou à se fermer, que son côté DC devienne DS ou DM, sans changer de longueur, il est clair que l'angle SDF étant obtus, le point S sera plus éloigné du point F que le point C : ainsi SF sera plus grande que l'hypothénuse CF, & par conséquent le quarré du côté SF opposé à l'angle obtus SDF, sera plus grand que la somme des quarrés faits sur les deux autres côtés.

On voit pareillement qu'en diminuant l'angle droit CDF qui peut devenir MDF, le point M du côté DM = DC sera plus près du point F que le point C ; d'où il résulte que MF est plus petite que l'hypothénuse CF, & par conséquent que le quarré de MF, opposé à l'angle aigu MDF, est plus petit que la somme des quarrés faits sur les deux autres côtés DM, DF.

Quand vous voudrez donc déterminer de quelle espèce est le Triangle dont vous connoissez les trois côtés, faites le quarré du plus grand côté : si ce quarré est égal à la somme des quarrés faits sur les deux autres côtés, le Triangle est réctangle ; s'il est plus grand, le Triangle est obtusangle ; & s'il est plus petit, le Triangle est acutangle. On a déja fait cette observation (n°. 191.) ; mais elle n'avoit pas été démontrée à la rigueur.

Nous n'avons pas besoin d'étendre davantage la théorie des lignes proportionnelles. Le petit nombre de Propositions que nous venons d'établir, est suffisant pour faire concevoir la méthode de lever toutes sortes de Plans, de construire des Cartes Topographiques, c'est-à-dire, de quelques lieux par-

ticuliers, de réduire des figures de grand en petit, ou de petit en grand, de trouver le rapport des figures semblables, tant de leurs contours que de leurs surfaces, de changer une figure en une autre, sans en augmenter ni en diminuer l'étendue, & enfin de plusieurs figures en faire une seule, qui n'ait pas plus de surface que toutes celles qui doivent la composer; la résolution des Problêmes suivans en sera une preuve incontestable.

PROBLÊME.

301. Déterminer le rapport des circuits, des contours ou des périmètres des *figures semblables* différentes du Triangle. (*fig.* 81.)

Les *figures semblables* sont celles qui ont tous leurs angles égaux, chacun à chacun, & les côtés, qui font les angles égaux, proportionnels. Ces figures peuvent être régulières ou irrégulières. Les figures régulières ont tous leurs côtés égaux & tous leurs angles égaux; mais, quand il y a de l'inégalité dans les côtés ou dans les angles d'uue figure, on dit qu'elle est *irrégulière*. Le *circuit*, le *contour* ou le *périmètre* d'une figure, est une ligne telle que ABCDEG, qui enveloppe ou environne toute la surface de cette figure. Cherchons d'abord quel est le rapport des périmètres des figures régulières: prenons les deux éxagones réguliers ABCDEG, *abcdeg*.

RÉSOLUTION.

302. Puisque tous les côtés du grand éxagone sont égaux aussi-bien que ceux du petit, AB contient *ab*, comme six fois AB contient six fois *ab*; donc AB . *ab* :: 6AB . 6*ab*. Or 6AB = ABCDEG, & 6*ab* = *abcdeg*; par conséquent AB . *ab* :: ABCDEG . *abcdeg*; ce qui

signifie, que *les circuits des figures régulières du même nombre de côtés sont entr'eux comme un côté est à un côté.*

En second lieu, si les figures sont irrégulières (*fig.* 82.) mais semblables, c'est-à-dire, si l'angle A = *a*, B = *b*, C = *c*, D = *d*, F = *f*, & que les côtés qui forment ces angles, soient proportionnels, ou que l'on ait AB . *ab* :: BC . *bc* :: CD . *cd* :: DF . *df* :: FA . *fa*, il est évident (n°. 258.) que la somme des antécédents AB + BC + CD + DF + FA, est à la somme des conséquents *ab* + *bc* + *cd* + *df* + *fa*, comme un antécédent quelconque AB est à son conséquent *ab*; mais la somme des antécédents compose les circuits de part & d'autre; donc les *périmètres ou les circuits des figures semblables, sont entr'eux comme un côté quelconque est à son côté correspondant*; C. Q. F. D.

Il est bon de sçavoir que les Géomètres appellent *côtés homologues*, les côtés correspondans dans les figures semblables : ainsi AB & *ab*, BC & *bc*, &c. sont des côtés homologues; c'est pourquoi on dit ordinairement, que *les circuits des figures semblables sont entr'eux comme les côtés homologues de ces figures.*

COROLLAIRE I.

303. Si des points A, *a* (*fig.* 82.), on tire les lignes AD, AC d'une part, & les lignes *ad*, *ac* d'autre part : je dis que les périmètres de ces figures sont entr'eux comme les lignes AD, *ad*, ou AC, *ac* semblablement tirées, c'est-à-dire, tirées d'un angle correspondant à un angle *correspondant* (*a*).

(*a*) J'appelle *Angle correspondant*, l'Angle d'une figure égal à l'Angle d'une autre figure semblable : c'est pourquoi je marquerai toujours par les mêmes lettres les Angles correspondans, afin que l'on puisse les reconnoître sans peine.

Car (par le Problême précédent) les circuits de ces figures sont entr'eux comme un côté AB est à son côté homologue ab ; mais puisque (supp.) l'angle $B = b$, & que $AB . ab :: BC . bc$, les Triangles ABC, abc sont semblables (n°. 284.) ; par conséquent $AB . ab :: AC . ac$; donc les circuits seront aussi comme AC, ac : c'est-à-dire, en peu de mots, que *les périmètres des figures semblables sont entr'eux comme les lignes semblablement tirées dans ces figures.*

Par conséquent les périmètres des figures semblables sont entr'eux comme les perpendiculaires FS, fs, abbaissées des angles correspondans, F, f, sur les côtés homologues AD, ad.

Dans les figures semblables régulières (*fig.* 81.), les périmètres sont aussi comme les rayons droits OM, om, ou comme les rayons obliques OG, og, parce que ces rayons sont des côtés homologues.

COROLLAIRE II.

304. Représentez vous les deux cercles x, y, que l'on ait divisés en un nombre égal de parties égales, dont les points de division soient si proches les uns des autres, que les cordes tirées d'un point quelconque à un point voisin, paroissent se confondre avec les arcs, dont elles sont les sous-tendantes ; commes les courbures des cercles sont uniformes, si l'on a divisé, par exemple, en trente parties égales chaque circonférence, une trentième partie de la première sera à une trentième partie de la seconde, comme une autre trentième partie de la première est à une autre trentième partie de la seconde, & ainsi de suite jusqu'aux dernières parties : par conséquent toutes les parties de l'une seront à toutes les parties de l'autre, comme une partie est à une partie ; ou autrement, la circonférence

entière du premier cercle sera à la circonférence entière du second, comme un arc du premier est à l'arc correspondant du second. Mais quand la division de la circonférence est poussée très-loin, les arcs se confondent avec leurs cordes, & n'en sont plus différens ; par conséquent les circonférences sont entr'elles, commes les cordes AB, *ab*, des arcs correspondans : or les cordes des arcs correspondans sont entr'elles comme les rayons AC, *ac* de leurs cercles, parce qu'il est visible que les Triangles ACB, *acb* sont semblables, lorsque l'arc AB est une même partie de sa circonférence que l'arc *ab* l'est de la sienne, l'angle ACB au centre étant alors égal à l'angle au centre *acb*, & les côtés de ces angles étant proportionnels (n°. 284.); donc, puisque les circonférences des cercles sont entr'elles comme les cordes de leurs arcs correspondans, & que ces cordes sont entr'elles comme les rayons de leurs cercles, il s'ensuit que *les périmètres ou les circonferences sont entr'elles comme leurs rayons*, ou, si l'on veut encore, *comme leurs diamètres qui sont doubles des rayons.*

Voilà pourquoi les Géomètres regardent les cercles comme des Poligones semblables. Cette idée est très-éxacte ; on ne peut en contester la valeur, quand on a jetté un regard attentif sur la courbure du cercle.

COROLLAIRE III.

305. Les circonférences des cercles étant entr'elles comme leurs rayons ou comme leurs diamètres, il s'ensuit qu'une circonférence est double, triple, quadruple, &c. d'une autre circonférence, quand son rayon ou son diamètre est double, triple ou quadruple du rayon ou du diamètre de cette autre circonférence.

PROBLÊME.

306. Trouver le rapport des surfaces des figures semblables.

RÉSOLUTION.

1°. Commençons par les Triangles semblables BAC, *bac* (*fig.* 84.). Des angles B, *b* correspondans, abbaissons les perpendiculaires BD, *bd*, sur les côtés homologues AC, *ac*; il est évident que les Triangles réctangles BDA, *bda* sont semblables, & qu'ainsi AC . *ac* : : BD . *bd* (n°. 283.). Appellons S la surface du grand Triangle; soit aussi sa base AC = B & sa hauteur BD = H. De même nommons *s* la surface du petit Triangle, *b* sa base *ac*, & *h* sa hauteur *bd*. Puisque la base AC est à la base *ac*, comme la hauteur BD est à la hauteur *bd*, on aura B . *b* : : H . *h*, ou $\frac{B}{b} = \frac{H}{h}$; donc $\frac{BB}{bb} = \frac{BH}{bh}$. Mais nous sçavons que les surfaces des Triangles sont entr'elles comme les produits de leur base par leur hauteur (n°. 274.); donc S . *s* : : BH . *bh*, ou $\frac{S}{s} = \frac{BH}{bh}$, & mettant $\frac{BB}{bb}$ au lieu de $\frac{BH}{bh} = \frac{BB}{bb}$, ainsi qu'on l'a trouvé ci-dessus, on a cette équation, $\frac{S}{s} = \frac{BB}{bb}$, ou S . *s* : : BB . *bb* : c'est-à-dire, que *les surfaces des Triangles sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues*, puisque AC est homologue à la base *ac*; C.Q.F.D.

2°. Les Parallélogrammes étant doubles des Triangles, il est évident que les Parallélogrammes semblables sont aussi entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues.

3°. Reprenons les Pentagones irréguliers sem-

blables (*fig.* 82.), dans lesquels des angles A, *a* correspondans, on a tiré les lignes A D, A C, & *ad*, *ac*, qui divisent chaque figure en autant de Triangles l'une que l'autre. On peut se convaincre aisément que chaque Triangle de l'un est semblable au Triangle correspondant de l'autre; par exemple, le Triangle A B C est semblable au Triangle *abc* : car, (par la supp.) l'angle B = *b*, & A B. *ab* :: B C. *bc*; donc (n°. 284.) le Triangle A B C est semblable au Triangle *abc* : ainsi B C. *bc* :: C A. *ca*; mais B C. *bc* :: C D. *cd*; donc C A. *ca* :: C D. *cd* : de plus, les angles B C A, *bca*, opposés aux côtés homologues A B, *ab*, sont égaux, ce qui rend aussi égaux les angles D C A, *dca*; par conséquent dans les Triangles A C D, *acd*, vous avez les angles C, *c* égaux, & les côtés C A, C D de l'un, proportionnels aux côtés *ca*, *cd* de l'autre; donc (n°. 284.) les Triangles A C D, *acd* sont semblables. Vous trouverez, en continuant, que le Triangle A F D est semblable au Triangle *afd*; ainsi tous les Triangles de la grande figure sont semblables à tous les Triangles de la petite, chacun à son correspondant.

Cela supposé, puisque les Pentagones irréguliers sont semblables, B C. *bc* :: C D. *cd* :: D F. *df*; donc (n°. 253.) $\overline{BC}^2 . \overline{bc}^2 :: \overline{CD}^2 . \overline{cd}^2 :: \overline{DF}^2 . \overline{df}^2$. Mais de plus les Triangles de l'un sont semblables aux Triangles correspondans de l'autre, comme on vient de voir : ainsi (n. 1°. de cet art.) T A B C. T *abc* :: $\overline{BC}^2 . \overline{bc}^2$, & T A C D. T *acd* :: $\overline{CD}^2 . \overline{cd}^2$; ainsi comme le rapport de $\overline{BC}^2$ à $\overline{bc}^2$ est égal au rapport de $\overline{DC}^2$ à $\overline{dc}^2$, on a T A B C. T *abc* :: T A C D. T *acd* : enfin T A D F. T *adf* :: $\overline{DF}^2$.

$\overline{df}^2 :: \overline{CD}^2 . \overline{cd}^2 :: TACD . Tacd$; donc $TACD$. $Tacd :: TADF . Tadf$; & par conséquent l'on a cette suite de rapports égaux, $TABC . Tabc :: TACD . Tacd :: TADF . Tadf$; donc (n°. 258.) la somme des antécédents est à la somme des conséquents, comme un antécédent quelconque est à son conséquent; c'est à-dire, $TABC + TACD + TADF . Tabc + Tacd + Tadf :: TABC . Tabc :: \overline{BC}^2 . \overline{bc}^2$; ainsi $TABC + TACD + TADF$, (ou le grand Pentagone) est à $Tabc + Tacd + Tadf$, (c'est-à-dire, au petit Pentagone) $:: \overline{BC}^2 . \overline{bc}^2$; ce qui signifie, *comme les quarrés de leurs côtés homologues.*

Donc généralement *les surfaces des figures semblables sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.*

4°. Il n'est pas difficile de déterminer le rapport des surfaces circulaires (*fig.* 83.) : car soit appellée la grande circonférence $= P$, le grand rayon $CA = R$, la petite circonférence $= p$, & le petit rayon $ca = r$.

Suivant le Problême 84, (n°. 202.), la surface du grand cercle x est égale à la moitié du produit de la circonférence par le rayon ; ainsi $x = \frac{PR}{2}$, & par la même raison $y = \frac{pr}{2}$; donc $x . y :: \frac{PR}{2} . \frac{pr}{2} :: PR . pr$; donc $\frac{x}{y} = \frac{PR}{pr}$: or (n°. 304.) les circonférences des cercles sont entr'elles comme leurs rayons ; ainsi $P . p :: R . r$; donc $\frac{P}{p} = \frac{R}{r}$; d'où l'on déduit $\frac{PR}{pr} = \frac{RR}{rr}$; par conséquent dans l'équation $\frac{x}{y} = \frac{PR}{pr}$, en mettant $\frac{RR}{rr}$ à la place de

$\frac{PR}{\varphi r}$, elle deviendra $\frac{x}{y} = \frac{RR}{rr}$; d'où l'on tire $x . y$ :: RR . rr; c'est-à-dire, que *les surfaces des cercles x, y, sont entr'elles comme les quarrés de leurs rayons: elles sont mêmes entr'elles comme les quarrés de leurs diamètres*; parce que les rayons sont entr'eux comme les diamètres.

REMARQUE.

Faites donc attention, que les rapports des périmètres des figures semblables sont fort différens des rapports de leurs surfaces: la circonférence ou le périmètre d'un cercle, par exemple, qui n'a qu'un pied de rayon, est six fois plus petite que la circonférence d'un autre cercle, dont le rayon seroit de six pieds, puisque les circonférences sont entr'elles comme les rayons (n°. 304.); mais sa surface ne seroit que la trente-sixième partie de celle dont le rayon auroit six pieds: car il vient d'être démontré que les surfaces sont entr'elles comme les quarrés de leurs rayons; c'est-à-dire, comme le quarré de 1 est au quarré de 6, ou comme 1, est à 36.

PROBLÊME.

307. Trouver une quatrième proportionnelle aux trois lignes AB, BC, AD. (*fig.* 85.)

RÉSOLUTION.

Faites un angle quelconque SAP. Du sommet A de cet angle portez sur l'un des côtés AS la première ligne AB, & du point B, où elle se termine, portez sur ce même côté la seconde ligne BC; ensuite du point A portez la troisième AD sur l'autre côté AP. Joignez les deux points B, D par la ligne BD; enfin par le point C tirez une parallèle

à BD : cette parallèle détermine la ligne DX ; qui est la quatrième proportionnelle cherchée.

DÉMONSTRATION.

Lorsque deux côtés d'un Triangle C A X sont coupés par une ligne parallèle à son troisième côté, ces côtés sont coupés proportionnellement (n°. 279.) : or c'est ce que fait la construction ; par conséquent A B . B C : : A D . D X : ainsi D X est la quatrième proportionnelle que l'on demandoit ; C. Q. F. D.

PROBLÊME.

308. Trouver une troisième proportionnelle aux deux lignes A B, B C. (*fig.* 86.)

RÉSOLUTION.

Elle est la même que ci-dessus : car, après avoir porté sur l'un ou l'autre côté d'un angle quelconque O A M la première ligne A B, & du point B, où elle se termine, la seconde ligne B C, on portera cette même seconde ligne de A en G sur l'autre côté A M ; on joindra les points B, G, & par le point C tirant une parallèle G X à la ligne B G, cette parallèle ira déterminer sur le côté A M la ligne G X, qui est la troisième proportionnelle aux deux lignes A B, B C ; ce qui est évident, puisque A B . B C : : A G ou B C . G X ; C. Q. F. T. & D.

PROBLÊME.

309. Trouver une moyenne proportionnelle entre les deux lignes A B, B D. (*fig.* 87.)

RÉSOLUTION.

Mettez sur une même ligne A D les deux lignes A B,

AB, BD, l'une précisément à la suite de l'autre, & marquez le point B qui les sépare : coupez AD en deux parties égales au point C, & de ce point avec le rayon CA ou CD, décrivez une demi-circonférence ; enfin élevez au point B la perpendiculaire BS : elle sera moyenne proportionnelle entre les lignes AB, BD.

DÉMONSTRATION.

Rappellez-vous la Proposition 24. (n°. 289.) où il a été démontré qu'une perpendiculaire abbaissée d'un point quelconque de la circonférence d'un cercle sur son diamètre, est moyenne proportionnelle entre les parties de ce diamètre qu'elle coupe : or la ligne BS tombe dans ce cas ; elle est donc moyenne proportionnelle entre les lignes AB, BD ; c'est-à-dire, que AB . BS : : BS . BD, ainsi qu'on le demandoit ; C. Q. F. T. & D.

PROBLÊME.

310. Couper une ligne BA en deux parties, telles que la ligne entière AB soit à une de ces parties BO, comme cette même partie BO est à l'autre partie OA.

On énonce ordinairement ce Problême ainsi : *Couper la ligne AB en moyenne & extrême raison.*

Il faut donc trouver cette proportion AB . BO : : BO . OA. (*fig.* 88.).

RÉSOLUTION.

Sur l'une des extrémités A de la ligne AB donnée, élevez la perpendiculaire AC = la moitié de AB : du point C avec le rayon CA, décrivez un cercle dont la ligne AB sera nécessairement tangente (n°. 105.), & de l'extrémité B de la ligne

A B, menez B C au centre du cercle; la partie BS hors du cercle sera la moyenne cherchée: ainsi portant B S de B en O, la ligne A B sera coupée en moyenne & extrême raison, c'est-à-dire, que l'on aura A B . B O : : B O . O A.

DÉMONSTRATION.

Puisque le rayon du cercle est égal à la moitié de A B (par la const.), son diamètre G S = A B; ainsi B S = B G − A B : or B O = B S (const.); donc B O = B G − A B, & A O = A B − B S = A B − B O.

Rappellez-vous maintenant le Corollaire de la Proposition 23. (n°. 288.) où il a été démontré qu'une tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière B G, & sa partie B S hors du cercle; on aura donc B G . A B : : A B . B S; donc (n°. 251.) B G − A B (B S ou B O) . A B : : A B − B S (A O) . B S ou B O; c'est-à-dire plus simplement, B O . A B : : A O . B O; donc en renversant (n°. 250.) A B . B O : : B O . A O; la ligne A B est donc coupée, ainsi qu'on le demandoit. On va voir l'usage de ce Problême.

PROBLÊME.

311. Déterminer le rapport du côté A B du Décagone inscrit dans un cercle au rayon C B de ce cercle. (*fig.* 89.)

RÉSOLUTION.

Tirez le rayon C A : l'angle A C B = 36 dégrés, c'est-à-dire, la dixième partie de 360; ainsi en retranchant cet angle de 180 dégrés, valeur des trois angles du Triangle isoscèle C A B, il reste 144 dégrés pour la valeur des deux angles A, B;

Et comme ces deux angles sont égaux, il s'ensuit que chacun d'eux = 72 dégrés, moitié de 144. Coupons un de ces angles CAB en deux parties égales; l'angle s & l'angle x seront chacun de 36 dégrés; l'angle C, au centre, étant aussi de 36 dégrés, il s'ensuit 1°. que le Triangle COA est isoscèle, & qu'ainsi CO = OA. 2°. Le Triangle OAB est aussi isoscèle; car l'angle x = 36 dégrés (par la const.), l'angle B en vaut 72; reste donc aussi 72 dégrés pour l'angle AOB; donc OA = AB: ainsi CO, OA, AB sont trois lignes égales; mais il a été démontré (n°. 281.) que si l'on coupoit un angle quelconque CAB d'un Triangle en deux parties égales, la base CB de cet angle seroit nécessairement coupée en deux segmens CO, OB, proportionnels aux deux côtés CA, AB qui forment cet angle; or l'angle CAB a été coupé en deux parties égales; donc CA. AB :: CO. OB; mais CA = CB, & AB = CO; par conséquent CB. CO :: CO. OB; ainsi CO est la moyenne proportionnelle du rayon CB coupé en moyenne & extrême raison, & par conséquent *le côté du Décagone* AB = CO *se trouve, en prenant la moyenne proportionnelle du rayon, coupé en moyenne & extrême raison.*

Réciproquement, si l'on coupe le rayon CB en moyenne & extrême raison, c'est-à-dire, si l'on fait CB . CO :: CO . OB, & que l'on porte CO de B en A, l'arc AB sera de 36^d, ou la corde AB sera le côté du Décagone inscriptible au cercle de la *fig.* 89.

DÉMONSTRATION.

Après avoir tiré AC & AO, nous dirons: puisque (supp.) CB . CO :: CO . OB, à cause de AB = CO (const.), nous aurons CB . AB

A B. O B ; donc (284.) les deux Triangles C B A, O B A, sont équiangles ; donc l'angle A O B = A B C, & A O = A B = O C ; donc l'angle C = s : mais, puisque A B C = B A C = $s + x$, il s'ensuit que A O B = $s + x$; or A O B = C + x, (parce qu'il est extérieur au Triangle A O C) ; donc $s + x = C + s$; donc $x = C$, & par conséquent les trois angles C, s, x sont égaux : à ces trois angles joignons l'angle A B C, qui vaut $s + x$, ainsi qu'on l'a déja vû, nous aurons, pour la valeur des trois angles du Triangle A B C, les cinq angles égaux C, s, x, s, x = 5 C = 180^d ; donc C = $\frac{180}{5}$ = 36^d, & par conséquent l'arc A B, mesure de l'angle C au centre, est aussi de 36^d. C. Q. F. D.

C'est ce que nous avons promis de démontrer dans le premier Livre de nos Institutions, quand il a été question d'inscrire ou de circonscrire des Polygones réguliers au cercle. On doit se souvenir que j'y donne une construction, qui fait connoître à la fois le côté du Décagone & celui du Pentagone, inscriptibles au même cercle : je vais la répéter ici, parce qu'il faut que je la démontre.

PROBLÊME.

312. Trouver par une seule construction le côté du Décagone & celui du Pentagone, inscriptibles au même cercle. (*fig.* 90.)

RÉSOLUTION.

Tirez le diamètre A B : élevez perpendiculairement le rayon C D ; portez ce rayon de B en S & en O : tirez S O, pour avoir le rayon C B coupé en deux parties égales au point G, parce que la ligne S O ayant deux de ses points à égale distance des extrémités C, B, les aura tous : portez G D

de G en F sur le diamètre; & tirez DF. Je dis que CF est le côté du Décagone, & DF celui du Pentagone, inscriptibles au même cercle.

Démonstration de la première Partie.

On aura démontré que CF est le côté du Décagone, si on prouve que cette ligne est la moyenne du rayon coupé en moyenne & extrême raison. Or, en vous rappellant le n°. 310. où l'on a enseigné l'art de couper une ligne en moyenne & extrême raison ; vous verrez qu'ayant élevé perpendiculairement sur l'extrémité du rayon DC la ligne CG qui en est la moitié, & décrit du point G un cercle CP, &c. tangent au rayon : vous verrez, dis-je, que la partie DP hors du cercle, est la moyenne du rayon coupé en moyenne & extrême raison ; par conséquent, puisque l'on a fait GD = GF, & que GP = GC, il est évident que DP = FC ; par conséquent FC est aussi la moyenne proportionnelle du rayon coupé en moyenne & extrême raison ; ainsi (n°. 311.) elle est le côté du Décagone inscriptible au cercle ; C. Q. F. 1°. D.

Présentement, considérez le Triangle réctangle DCF ; comme DC rayon du cercle est le côté de l'Héxagone inscriptible, s'il est vrai que FD soit le côté du Pentagone inscriptible, il faut (n°. 293.) que $\overline{FD}^2$, quarré du côté du Pentagone inscriptible, soit égal à la somme $\overline{FC}^2 + \overline{CD}^2$ des quarrés faits sur le côté de l'Héxagone & sur celui du Décagone, inscriptibles au même cercle : or c'est ce que nous allons démontrer.

Démonstration de la seconde Partie.

Soit A B le côté du Pentagone (*fig.* 91.); A D ou D B celui du Décagone; C A ou C B rayon du cercle ou côté de l'Héxagone, inscriptibles au même cercle. Du centre C abbaissons une perpendiculaire C S sur le côté A D du Décagone, & remarquons, 1°. que le Triangle A O D est un Triangle isoscèle, parce que C S étant, par la construction, perpendiculaire sur le milieu du côté A D, le point O, où cette perpendiculaire coupe A B, est à égale distance de A & de D; donc A O = O D: ainsi l'angle A = l'angle O D A; mais (par la construction) le Triangle A D B est aussi isoscèle: ainsi l'angle A = l'angle B; les deux Triangles A O D, A D B, ayant deux angles égaux, chacun à chacun, sont donc équiangles (n°. 285.); par conséquent (n°. 283.) les côtés opposés aux angles égaux sont proportionnels; donc l'on a cette proportion, A B . A D : : A D . A O, d'où l'on tire $\overline{AD}^2 = AB \times AO$. 2°. Il est aussi très-facile de reconnoître que les Triangles C A B, C O B sont des Triangles semblables: car, 1°. ils ont l'angle B commun. 2°. L'angle O C B = 54 dégrés, puisqu'il est égal à l'angle A C B moins l'angle A C S, c'est-à-dire, à 72 dégrés − 18 dégrés = 54 dégrés; pareillement l'angle C A B = 54 dégrés: car l'angle A C B au centre = 72 dégrés; reste donc 108 dégrés pour les deux angles A, B. Ces deux angles sont égaux; ils ont donc chacun 54 dégrés; par conséquent l'angle C A B est de 54 dégrés, aussi-bien que l'angle O C B; donc (n°. 285.) les Triangles C A B, C O B sont équiangles; & par conséquent (n°. 283.) ils ont leurs côtés proportionnels; donc A B . C B

:: CB . OB ; ainsi $AB \times OB = \overline{CB}^2$: mais nous avons déja trouvé que $AB \times OA = \overline{AD}^2$; par conséquent $AB \times \overline{AO + OB} = \overline{CB}^2 + \overline{AD}^2$: or $AO + OB = AB$; donc enfin $\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{AD}^2$, ce qui signifie que le quarré du côté du Pentagone est égal à la somme des quarrés faits sur le côté du Décagone & sur celui de l'Héxagone, inscriptibles au même cercle.

On n'a pas absolument besoin de cette derniere construction, pour avoir le côté du Pentagone, puisque ce côté se trouve, en doublant l'arc dont le côté du Décagone est soustendant ; on peut donc la passer sans aucun inconvénient, si ce n'est que l'on se prive par-là d'une construction très-élégante.

PROBLÊME.

313. Trouver une moyenne proportionnelle Arithmétique entre les deux lignes AB, BC. (*fig.* 92.)

RÉSOLUTION.

Mettez ces deux lignes l'une à la suite de l'autre sur une même ligne AC ; coupez cette ligne en deux parties égales au point D : l'une de ces deux moitiés sera la moyenne Arithmétique proportionnelle entre les lignes données AB, BC.

DÉMONSTRATION.

Il s'agit de prouver que la moyenne proportionnelle Arithmétique est la moitié de la somme des deux lignes AB, BC. Soit appellée x la ligne cherchée : on aura $AB . x : x . BC$; donc (n°. 263.) $AB + BC = 2x$; par conséquent

$x = \frac{AB + BC}{2}$, c'est-à-dire, que la moyenne proportionnelle Arithmétique entre deux lignes est égale à la moitié de la somme de ces deux lignes ; C. Q. F. D.

PROBLÊME.

314. Avec la ligne M S faire un Parallélogramme égal en surface au Parallélogramme A B D C. (*fig.* 93.)

RÉSOLUTION.

On voit qu'il s'agit de trouver une ligne, dont la longueur multipliée par M S, donne un produit égal à celui de la base C D par la perpendiculaire A O, que l'on abbaissera d'un angle quelconque sur le côté opposé, en cas que le Parallélogramme donné ne soit pas Réctangle. Nommons X cette ligne inconnuë : par la condition du Problême nous aurons $MS \times X = CD \times AO$ (n°. 165.) ; donc (n°. 245.) $MS . CD :: AO . X$, où l'on voit que la ligne qui résout le Problême, est une quatrième proportionnelle aux trois lignes données M S, C D, A O.

Cherchez donc cette quatrième proportionnelle M X (n°. 307.), & faites-en le Réctangle M X P S avec la ligne donnée M S ; ce Réctangle aura la même surface que le Parallélogramme donné : car (par la construction) $MS . CD :: AO . MX$; donc $MS \times MX = CD \times AO$.

PROBLÊME.

315. Transformer en quarré le Réctangle M X P S (*fig.* 93.), c'est-à-dire, trouver un quarré, dont la surface soit égale à celle de ce Réctangle,

RÉSOLUTION.

Soit Y Y le quarré inconnu. Par la condition du Problême $YY = MX \times MS$; donc (nº. 246.) $MX . Y :: Y . MS$; il faut donc chercher une moyenne proportionnelle CD entre la hauteur MX & la base MS du Réctangle proposé (nº. 309.), & faire avec cette ligne le quarré CDOS (fig. 94.): il sera égal en surface au Réctangle MXPS: car, par la construction, $MX . CD :: CD . MS$; donc $MX \times MS = \overline{CD}^2$; C. Q. F. D.

REMARQUE.

316. Observons ici que plus les figures approchent d'être régulières, c'est-à-dire, moins leurs côtés diffèrent les uns des autres, moins aussi ils ont de circuit par rapport à l'aire ou à la surface que renferment ces côtés. Prenez un terrein réctangulaire ou un Parallélogramme Réctangle, dont la base $= 18$ toises & la hauteur 2 toises; la surface de ce terrein sera de 36 toises quarrées, & son circuit 40 toises courantes. Prenons un autre Réctangle, dont les côtés diffèrent un peu moins; que sa base, par éxemple, ait 12 toises & sa hauteur 3: la surface de ce Réctangle sera égale au précédent, puisque $3 \times 12 = 36$; mais son circuit n'aura que 30 toises courantes; & si l'on avoit supposé la base de ce Réctangle $= 9$ toises & sa hauteur $= 4$, sa surface auroit encore été de 36 toises quarrées, & son circuit de 26 toises courantes seulement: enfin plus les côtés de cette figure tendront à l'égalité, en y supposant toujours la même surface, moins le circuit sera grand; ensorte que le circuit de cette figure sera le plus petit possible, lorsque la base sera égale à la hauteur: effectivement la base

étant de 6 toises comme la hauteur, on aura toujours pour la surface 36 toises quarrées ; mais le circuit sera réduit à 24 toises courantes, & ne pourra plus diminuër.

Cette observation peut être de quelque utilité, lorsque l'on fait construire des bâtimens destinés à servir de magasins : car, à surface égale, plus la figure de ces bâtimens sera régulière, moins il y faudra de muraille ; ce qui est quelquefois d'une très-grande considération.

C'est une chose remarquable, que les Abeilles se conduisent éxactement sur ce principe dans la construction de leurs *Alvéoles* : on appelle ainsi les petites cellules où ces Mouches déposent leur miel. Elles les construisent en Héxagones tous égaux & parfaitement réguliers. On a déja vû (no. 147. T. I.) qu'il n'y a que trois sortes de Poligones réguliers, dont on puisse faire usage pour carreler les appartemens, quand on veut n'employer à cette opération que des carreaux d'une même espèce : il faut absolument que ce soient ou des Triangles équilatéraux, ou des Quarrés, ou des Héxagones.

Entre la multitude infinie des Poligones qui pouvoient se présenter à l'industrie des Abeilles, les seuls réguliers ont eu droit à leur sagesse, & les Héxagones à leur économie. Car, à circuit égal, c'est-à-dire, avec le même travail & la même dépense, on renferme plus de terrein dans un Héxagone régulier que dans un Triangle équilatéral, ou que dans un Quarré. Ainsi les Abeilles *géométrisent* dans leurs constructions ; c'est un fait que déposent unanimement toutes les ruches ; & la Géométrie va mettre le comble à la certitude de leur témoignage.

DÉMONSTRATION.

Suppoſons donc que le Triangle équilatéral M, (*PL.* 21.) le Quarré R, & l'Héxagône régulier T ayent le même circuit; que chacun, par exemple, ait 36 pieds de tour: je dis que le Triangle renferme moins d'eſpace que le Quarré, & le Quarré moins que l'Héxagone.

Cherchons d'abord la ſurface du Triangle M; ſon circuit étant 36 (ſuppoſition), ſa baſe BC = 12, dont la moitié BD = 6. Pour avoir la hauteur AD de ce Triangle, remarquons, à cauſe de l'angle droit en D, que le quarré de l'hypothénuſe $\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2$; donc $\overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2$; & comme AB = 12, & BD = 6, $\overline{AB}^2$ ſera = 12 × 12 = 144, & $\overline{BD}^2 = 6 \times 6 = 36$; ainſi l'équation $\overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2$ deviendra $144 - 36 = \overline{AD}^2 = 108$; par conſéquent, en extrayant la racine quarrée, $AD = \sqrt[2]{108}$, laquelle vaut plus de 10 & ne vaut pas 11. Si on multiplie donc la moitié de la baſe BD = 6 par 11, le produit 66 ſera une aire plus grande que celle du Triangle M. Or le côté du Quarré R étant = 9, ſa ſurface ſera = 9 × 9 = 81, beaucoup plus grande que 66. Il eſt donc démontré que le Quarré R eſt plus grand que le Triangle M.

Faiſons voir préſentement que l'Héxagone T > R, ou > 81. On ſçait que le rayon OS = le côté SR de l'Héxagone. Tout le circuit étant 36, OS ou SR = 6, & SP = 3. L'angle en P eſt

droit ; donc le quarré de l'hypothénuse $\overline{OS}^2 = \overline{SP}^2 + \overline{OP}^2$, ou $\overline{OS}^2 - \overline{SP}^2 = \overline{OP}^2$; c'est-à-dire, $36 - 9 = \overline{OP}^2 = 27$. Ainsi la hauteur OP $= \sqrt[2]{27}$, laquelle est plus grande que 5. En multipliant donc SP par OP, ou 3 par $\sqrt[2]{27}$, pour avoir l'aire du Triangle OSR, on aura un produit plus grand que $3 \times 5 = 15$. Il faut prendre 6 fois le Triangle OSR pour avoir l'aire de l'Héxagone ; ainsi 15×6 sont moindres que cette aire. Or $15 \times 6 = 90 > 81$, que l'on a trouvé pour la surface du Quarré R ; à plus forte raison l'espace renfermé dans l'Héxagone est plus grand que celui du Quarré ; C. Q. F. D.

I. La Démonstration seroit imparfaite, si on en bornoit l'application à un cas particulier. Rendons-là générale ; & pour cela soit chacun des circuits des figures proposées $= c$; chaque côté BC du Triangle équilatéral M est le tiers de son contour, c'est-à-dire, BC $= \frac{c}{3}$, & BD, moitié de BC, en est le sixième ; ainsi BD $= \frac{c}{6}$: mais on sçait que le quarré de l'hypothénuse $\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2$; donc $\overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2$; par conséquent, puisque AB $= \frac{c}{3}$, $\overline{AB}^2 = \frac{c^2}{9}$, & $\overline{BD}^2 = \frac{c^2}{36}$; l'équation précédente devient donc $\frac{c^2}{9} - \frac{c^2}{36} = \overline{AD}^2 = \frac{4c^2}{36} - \frac{c^2}{36} = \frac{3c^2}{36} = \frac{c^2}{12}$.

ainsi la hauteur $AD = \sqrt{\frac{c^2}{12}}$ & l'aire du Triangle $M = BD \times AD = \frac{c}{6} \times \sqrt{\frac{c^2}{12}}$.

II. Dans le Quarré R, chaque côté $GL = \frac{c}{4}$; donc $R = \frac{c}{4} \times \frac{c}{4} = \frac{c^2}{16}$. Or je dis que l'aire $\frac{c}{6} \times \sqrt{\frac{c^2}{12}}$ du Triangle M, est plus petite que $\frac{c^2}{16}$, qui est celle du Quarré.

Car de deux grandeurs que l'on compare, celle-là est la plus petite dont le quarré est le plus petit.

Le quarré de l'aire $\frac{c}{6} \times \sqrt{\frac{c^2}{12}}$ du Triangle M est $\frac{c^2}{36} \times \frac{c^2}{12}$; puisqu'une quantité, affectée d'un radical, s'élève à son Quarré par cela seul qu'on en fait évanouir le radical, dont l'exposant est 2 (n°. 93 Alg.). En achevant la multiplication, le quarré de l'aire du Triangle M devient $= \frac{c^4}{432}$; mais en quarrant $\frac{c^2}{16}$, qui est l'aire du Quarré R, on trouve $\frac{c^2}{16} \times \frac{c^2}{16} = \frac{c^4}{256}$. Or il est tout-à-fait évident que $\frac{c^4}{432} < \frac{c^4}{256}$; puisqu'une fraction est d'autant plus petite que son dénominateur est plus grand, le numérateur restant le même. Le Triangle équilatéral est donc plus petit que le Quarré de même circuit.

III. Recherchons présentement la surface de l'Héxagone régulier T. Son circuit étant $= c$ (supp.), son côté $SR = OS$ (n°. 119. T. Ier) $= \frac{c}{6}$, & $SP = \frac{c}{12}$; donc $\overline{OS}^2 = \frac{c^2}{36}$, & $\overline{SP}^2 = \frac{c^2}{144}$.

Or, comme on l'a vû ci-dessus, $\overline{OS}^2 = \overline{SP}^2 + \overline{OP}^2$, ou $\overline{OS}^2 - \overline{SP}^2 = \overline{OP}^2$ (en substituant les nombres) $= \frac{c^2}{36} - \frac{c^2}{144} = \frac{4c^2}{144} - \frac{c^2}{144} = \frac{3c^2}{144} = \frac{c^2}{48}$, donc la hauteur $OP = \sqrt{\frac{c^2}{48}}$. On a l'aire d'un Poligone régulier, en multipliant la moitié de son contour par la perpendiculaire abbaissée du centre sur l'un de ses côtés; ainsi l'aire de l'Héxagone T $= \frac{c}{2} \times \sqrt{\frac{c^2}{48}}$. On a vû (art. II.) que l'aire du quarré R $= \frac{c^2}{16}$. Ainsi il faut démontrer que $\frac{c}{2} \times \sqrt{\frac{c^2}{48}} > \frac{c^2}{16}$. Or cette Démonstration sera complette, si l'on fait voir que le quarré de la première de ces deux quantités est plus grand que celui de la seconde. Le quarré de $\frac{c}{2} \times \sqrt{\frac{c^2}{48}}$ est $\frac{c^2}{4} \times \frac{c^2}{48}$ (art. II.) $= \frac{c^4}{192}$, & le quarré de $\frac{c^2}{16} = \frac{c^4}{256}$; mais il est évident que $\frac{c^4}{192} > \frac{c^4}{256}$; l'Héxagone est donc aussi plus grand que le Quarré de même circuit; & c'est tout C. Q. F. D. (a).

Si des cercles disposés autour d'un point n'y laissoient pas des vuides, comme on le voit (*fig. L.*

(a) Comme les quantités, qui se trouvent sous le signe radical dans le calcul précédent, n'ont point une racine quarrée, que l'on puisse apprécier à toute rigueur, j'ai pris le parti de faire évanouir ces radicaux; ce qui m'a conduit à une Démonstration fort simple, fondée sur un principe qui ne l'est pas moins. Voilà pourquoi des Propositions, que l'on démontre en deux mots à des personnes un peu instruites, éxigent de longs circuits pour être entendues de celles qui ne le sont pas assez. Les premiers Pas, que l'on fait dans l'application de la Géométrie aux besoins de la société, conduisent donc au calcul des radicaux. On le trouvera très-simplement expliqué & démontré au commencement de mon *Traité des Courbes ou des Sections Coniques appliquées aux Arts*, enrichi de Dissertations historiques & critiques sur l'origine des découvertes, qui font l'objet de ce Traité.

PL. 7.), il paroît que les Abeilles n'auroient pas manqué d'en faire usage pour la construction de leurs Alvéoles ; puisque de toutes les figures régulières de même circuit, le cercle est celle qui renferme un plus grand espace.

DÉMONSTRATION.

IV. Elle se réduit ici à faire voir que le cercle est plus grand que l'Héxagone régulier. Rappellons-nous que, suivant Archimède, le diamètre d'un cercle étant 7, sa circonférence n'est pas tout-à-fait 22 ; & qu'ainsi, en supposant la circonférence $= 22$, le diamètre est un peu plus de 7 : car à une plus grande circonférence répond un plus grand diamètre. Nous le prendrons néanmoins sur le pied de 7 ; & l'aire du cercle qui en résultera sera évidemment plus petite que la véritable. Or, si l'on démontre que cette aire est plus grande que celle de l'Héxagone, il faudra convenir, à plus forte raison, que le cercle est aussi plus grand.

Soit donc la circonférence de ce cercle $= c$; ainsi qu'on l'a supposé pour le circuit des autres Poligones réguliers : on aura son diamètre d (art. IV.) en faisant $22 . 7 :: c . d = \frac{7c}{22}$; donc le quart de ce diamètre ou la moitié du rayon est $\frac{7c}{22}$ divisé par 4, laquelle $= \frac{7c}{88}$. On sçait qu'on a l'aire d'un cercle en multipliant sa circonférence c par la moitié de son rayon $\frac{7c}{88}$; par conséquent l'aire du cercle $= \frac{7c^2}{88}$, dont le quarré $= \frac{49c^4}{88 \times 88} = \frac{49c^4}{44 \times 2 \times 88}$. Or on a vû (art. III.) que le quarré de l'aire de l'Héxagone $= \frac{c^4}{192}$. Ainsi, en démontrant que $\frac{49c^4}{44 \times 2 \times 88} > \frac{c^4}{192}$, il sera clair que le cercle est

aussi plus grand que l'Héxagone de même circuit. Observons donc que $\frac{49c^4}{44\times2\times88} = \frac{44c^4}{44\times2\times88} + \frac{5c^4}{44\times2\times88}$; mais $\frac{44c^4}{44\times2\times88}$, (qui n'est qu'une partie du quarré de l'aire du cercle) $= \frac{c^4}{2\times88} = \frac{c^4}{176}$, quantité visiblement plus grande que le quarré $\frac{c^4}{192}$ de la surface de l'Héxagone; car de deux fractions, qui ont le même numérateur, celle-là est la plus grande qui a le plus petit dénominateur ou le plus petit diviseur. Concluons donc, sans en dire davantage, que l'aire d'un cercle est plus grande que celle d'un Héxagone régulier de même circuit.

Mais est-elle plus grande que celle de tout Polygone régulier de même circuit? Le nombre des côtés du Polygone, comparé au cercle, fût-il plus grand qu'aucun nombre donné, son aire sera toujours plus petite que le cercle; & c'est-là une espèce de Paradoxe géométrique: car le rayon de ce Polygone sera toujours plus grand que celui du cercle. Il n'y a, pour s'en convaincre, qu'à considérer le cercle X (*Pl.* 21.) & le Polygone quelconque T de même circuit; le cercle décrit du centre O, avec le rayon OS, sera évidemment circonscrit à cette figure, que l'on suppose régulière. Ainsi la circonférence de ce cercle circonscrit sera plus grande que le périmètre du Polygone inscrit. Or (supp.) ce périmètre = la circonférence du cercle X; par conséquent la circonférence du cercle, circonscrit au Polygone T, sera plus grande que celle du cercle X; donc le rayon OS de la première sera plus grand que le rayon MG de la seconde.

Il y a plus: le Polygone T, quoique plus petit, comme on le verra bientôt, que le cercle X de même

même contour, ne ſçauroit être inſcrit à ce cercle : autrement, le périmètre contenu ſeroit égal au contenant ; ce qui eſt abſurde.

Néanmoins l'aire du Polygone régulier quelconque T eſt plus petite que le cercle X de même circuit.

DÉMONSTRATION.

Soit $= c$ le circuit de l'une & de l'autre figure ; le rayon de X $= r$: ſoit auſſi $= h$ la perpendiculaire O P, abbaiſſée du centre O ſur l'un des côtés quelconque S R du Polygone T. On ſçait que, pour avoir l'aire de T, il faut multiplier la moitié de ſon circuit c par la perpendiculaire h ; ce qui donne $T = \frac{ch}{2}$; or le cercle $X = \frac{cr}{2}$; ainſi $T . X :: \frac{ch}{2} . \frac{cr}{2}$; &, en diviſant les deux derniers termes de cette proportion par $\frac{c}{2}$, on trouve $T . X :: h . r$. Si l'on démontre donc que $h < r$, il ſera clair que $T < X$.

Il faut abſolument que h ſoit égale à r, ou plus grande ou plus petite ; mais les deux premiers cas ſont impoſſibles. Car, en décrivant un cercle du centre O avec $OP = h$, ce cercle ſeroit inſcrit au Polygone T ; ſa circonférence ſeroit par conſéquent plus petite que le circuit de ce Polygone : cependant, ſi l'on ſuppoſoit $h = r$, la circonférence inſcrite à T égaleroit la circonférence de X, puiſque des rayons égaux donnent des circonférences égales ; or (ſupp.) la circonférence de X $=$ le contour de T ; donc la circonférence inſcrite à T égaleroit auſſi le circuit de ce Polygone ; ce qui eſt impoſſible.

On voit de même que h ne ſçauroit être plus grande que r ; autrement la circonférence décrite

avec *h* du centre O, seroit en même tems inscrite au Polygone T, & plus grande que le périmètre de ce Polygone; puisqu'elle seroit plus grande que celle du cercle X; qui est égale à ce périmètre. Ainsi la perpendiculaire *h* ne pouvant être égale au rayon *r*, ni plus grande, c'est une nécessité qu'elle soit plus petite.

Reprenant donc la proportion $T . X :: h . r$; puisque $h < r$, on aura aussi $T < X$. C. Q. F. D.*

On voit par-là combien est grande l'erreur de ceux qui estiment la grandeur des Villes ou des terreins par leur circuit. Il y a des circonstances où un terrein pourroit contenir deux, trois, quatre fois, &c. moins qu'un autre, & cependant avoir quatre fois, cinq fois, &c. plus de circuit; le calcul en est trop aisé, nous ne nous y arrêterons pas plus long-tems.

PROBLÊME

317. Quarrer un Triangle, ou déterminer le quarré dont la surface soit précisément égale à celle du Triangle ABC. (*fig. 95.*)

RÉSOLUTION.

D'un angle quelconque B abbaissons une perpendiculaire BD sur le côté opposé AC, pour déterminer la base & la hauteur de ce Triangle; & nommions Y le côté du quarré inconnu. Suivant la

* Cette dernière Démonstration étant absolument générale, puisqu'on ne l'a appliquée à aucun Polygone en particulier, j'aurois pu me dispenser de la comparaison de l'Héxagone au cercle, que j'ai faite ci dessus; mais j'ai été bien aise de faire voir qu'une Démonstration, qui s'applique à tous les cas, est quelquefois plus simple & plus aisée, que celle où il ne s'agiroit que d'un cas déterminé, ainsi que l'on peut s'en convaincre ici, en comparant cette dernière Démonstration à la précédente. Celle-ci a même un autre avantage; c'est qu'elle est totalement indépendante du rapport vrai ou approché de la circonférence d'un cercle à son diamètre.

condition du Problême, nous aurons $YY = \frac{AC}{2} \times BD$. D'où l'on tire cette proportion, $\frac{AC}{2} . Y :: Y . BD$; ce qui nous montre que le côté du quarré inconnu est une moyenne proportionnelle entre la moitié de la base & la hauteur du Triangle proposé.

Cherchons donc (n°. 309.) une moyenne proportionnelle OS entre la moitié de la base AC & la hauteur BD du Triangle ABC. Sur cette ligne OS faisons le quarré OSBD, il sera égal en surface au Triangle ABC.

DÉMONSTRATION.

Par la construction, $\frac{AC}{2} . OS :: OS . BD$; donc $\overline{OS}^2 = \frac{AC}{2} \times BD$; c'est-à-dire, que le quarré fait sur OS est égal au produit de la moitié de la base AC par la hauteur BD. Or ce produit exprime la surface du Triangle ABC (n°. 177.). Donc, &c. Une moyenne proportionnelle entre la base entière & la moitié de la hauteur, auroit aussi déterminé le quarré cherché.

PROBLÊME.

318. Faire que deux ou plusieurs Parallélogrammes donnés ayent la même hauteur, sans changer de surface.

Voulez-vous que le grand Parallélogramme ABDS soit de même hauteur MP que le petit Parallélogramme BCFM (*fig.* 96.)?

RÉSOLUTION.

Il est clair qu'il faut transformer le grand Parallélogramme ABDS en une autre de même sur-

face, mais dont la hauteur = MP. Reste donc à trouver la base de ce Parallélogramme inconnu. Appellons X cette base, & abbaissons la perpendiculaire ST. Suivant la condition du Problême, $AB \times ST = MP \times X$; donc MP. ST :: AB. X, où l'on voit que la base cherchée est une quatrième proportionnelle aux trois lignes données MP, ST, AB: ainsi (n°. 307.) on déterminera cette quatrième proportionnelle LN, qui servira de base au Parallélogramme LNHR, auquel on donnera la hauteur RL = MP. Ce Parallélogramme sera égal en surface au Parallélogramme BCFM, ainsi qu'on le demandoit.

DÉMONSTRATION.

La construction donne MP. ST :: AB. LN. Donc $LN \times MP = AB \times ST$; mais (const.) MP = LR: ainsi $LN \times LR = AB \times ST$. C'est-à-dire, que le Parallélogramme LNHR est égal au Parallélogramme ABDS, en même tems qu'il a une hauteur égale à celle du petit Parallélogramme BCFM; & c'est tout ce que l'on demandoit.

COROLLAIRE I.

319. Il est aisé présentement de faire un seul Parallélogramme des deux Parallélogrammes ABDS, BCFM: on ajoutera (*fig.* 96.) la base BC du petit Parallélogramme à celle du Parallélogramme LNHR; c'est-à-dire, que l'on fera le prolongement LO = BC, & achevant le Parallélogramme ONHG, il sera égal aux deux Parallélogrammes ABDS, BCFM; ce qui est assez évident.

Par conséquent, en réduisant à la même hauteur tel nombre de Parallélogrammes que l'on voudra, on

en pourra toujours faire un seul Parallélogramme.

Il n'est pas besoin d'avertir que l'on auroit la même chose, si on les réduisoit tous à la même base; on feroit alors la somme de toutes les hauteurs de la même manière que l'on a pris la somme des bases, &c.

COROLLAIRE II.

320. Et comme l'on peut (n°. 315.) transformer un Réctangle quelconque en quarré, il est clair que l'on peut aussi trouver un seul quarré égal en surface à tel nombre de Parallélogrammes que l'on voudra supposer.

PROBLÊME.

321. Trouver un seul Triangle égal à plusieurs Triangles donnés ABC, OGS. (*fig.* 97.) On voit qu'il suffit d'en sçavoir réduire deux à un seul.

RÉSOLUTION.

Transformons OGS l'un des deux Triangles en un autre de même surface, mais dont la hauteur soit égale à celle du Triangle ABC.

Puisque la hauteur AH du Triangle inconnu est donnée, il ne s'agit plus que de trouver sa base que j'appelle X. Or la condition du Problême est que $\frac{AH \times X}{2} = \frac{GS \times OT}{2}$. Donc $AH \times X = GS \times OT$: ainsi $AH . OT :: GS . X$; la base cherchée est donc une quatrième proportionnelle aux deux hauteurs AH, OT, & à la base GS. On trouvera cette quatrième proportionnelle PR (par le n°. 307.): on en fera la base d'un Triangle PRH, auquel on donnera pour hauteur $PH = AH$; & le Triangle PRH, de même hauteur que le Triangle ABC, aura une surface égale à celle du Triangle OGS.

Puis donc que les deux Triangles A B C, P R H, sont de même hauteur, ajoutez la base B C = P M de l'un, à la base P R de l'autre, & tirez H M; il est évident que le Triangle M H R est égal à la somme des deux Triangles proposés A B C, O G S, puisque le Triangle M R H renferme deux Triangles, qui sont égaux aux deux Triangles A B C, O G S.

COROLLAIRE III.

322. Mais on a donné (n°. 317.) le moyen de quarrer un Triangle; & par conséquent on peut trouver un seul quarré égal à tel nombre de Triangles que l'on voudra, après avoir réduit tous les Triangles en un seul. Enfin toute figure, terminée par des lignes droites, se résout en Triangles; il n'y a donc point de figures réctilignes, dont on ne puisse avoir la quadrature.

PROBLÊME.

323. Transformer un Trapèse A B C D, dont les deux côtés A B, D C sont parallèles, en un Parallélogramme qui lui soit égal en surface (*fig.* 98.).

RÉSOLUTION.

Cherchez une moyenne proportionnelle Arithmétique (n°. 312.) entre la base D C supérieure & la base A B inférieure de ce Trapèse, c'est-à-dire, coupez en deux parties égales la somme des bases A B, D C, & sur l'une de ces moitiés A S, faites le Réctangle A S P D, dont la hauteur A D soit égale à la hauteur D O du Trapèse; je dis que le Réctangle A S P D est égal en surface au Trapèse A B C D.

DÉMONSTRATION.

Il s'agit de prouver que le Trapèse A B C D est

égal à un Parallélogramme de même hauteur, dont la base est moyenne proportionnelle Arithmétique entre les bases A B, D C de ce Trapèse.

On sçait (n°. 313.) que cette moyenne proportionnelle Arithmétique est égale à la moitié de la somme A M des deux bases A B, D C du Trapèse. Soit donc A S égale à cette moitié, & par le point S menons S P parallèle au côté A D : en prolongeant C D, nous aurons le Parallélogramme ASPD de même hauteur que le Trapèse, & dont la base A S sera une moyenne proportionnelle Arithmétique entre les bases parallèles A B, D C de ce Trapèse; il s'agit donc de démontrer que le Parallélogramme A S P D est égal au Trapèse A B C D.

Premièrement, ces deux figures ont la partie commune A S X C D; reste à prouver que l'autre partie C X P = l'autre partie B X S. Remarquez donc que (par la const.) D C + C P = A S = S M = S B + B M ; ainsi D C + C P = S B + B M. Or B M = D C, (puisque A M est la somme des deux bases A B, D C); donc C P = B S : de plus, à cause des parallèles D P, A B, les angles *a*, *d*, alternes internes sont égaux; les angles B, C, le sont aussi : ainsi les deux Triangles C X P, B X S, ayant un côté égal, & sur ce côté des angles égaux, chacun à chacun, sont parfaitement égaux en surface (n°. 85.); & c'est tout ce qui restoit à prouver.

COROLLAIRE I.

324. Il est donc facile d'évaluer un Trapèse. Supposons que la base A B = 14 toises, D C = 6 toises, & la hauteur D O = 10 : faites la somme 14 + 6 = 20 des deux bases A B, B C. Prenez-en la moitié 10 : multipliez cette moitié 10 par la hauteur O D = 10; le produit, 100 toi-

ses quarrées, sera la valeur du Trapèse A B C D.

COROLLAIRE II.

Puisque C P = B S, on aura C X = X B. Remarquez donc que la ligne X *t*, menée par le milieu des deux côtés C B, D A, est égale à la moyenne proportionnelle Arithmétique entre les deux côtés A B, D C parallèles. (*fig.* 98.)

PROBLÊME.

525. Quarrer un cercle, c'est à-dire, trouver un quarré, dont la surface soit égale à celle d'un cercle proposé.

RÉSOLUTION.

Jusqu'à présent ce Problême n'a point été résolu à la rigueur; il est devenu fameux sous le nom de la *Quadrature du Cercle* : on l'a tentée de bien des façons sans aucun succès; mais au fond une résolution éxacte de ce Problême seroit beaucoup plus curieuse qu'utile: car, pour nos besoins, on a la mesure du cercle aussi précise qu'il est nécessaire.

Supposons que le cercle O (*fig.* 99.) soit la base d'une colonne. Enveloppez sa circonférence M C S avec une mesure pliante: remettez en ligne droite la partie qui s'est appliquée à la circonférence: prenez O M égale à cette mesure réctifiée, pour servir de base à un Triangle M O S dont la hauteur = O S, rayon du cercle proposé. Il a été démontré (n°. 202.) que ce Triangle est égal au cercle, en cas que la base O M soit au juste la longueur de la circonférence C S M : or il est facile de quarrer le Triangle O M S, puisque (n°. 317.) il n'y a qu'à chercher une moyenne proportionnelle entre la moitié de la base O M & la hauteur O S: cette moyenne proportionnelle sera le côté du

Quarré égal en surface au Triangle O M S, & par conséquent au cercle proposé. En un mot, on a l'aire d'un cercle, en multipliant la moitié de la circonférence pas le rayon.

PROBLÊME.

326. Trouver un Quarré égal à tant de Quarrés que l'on voudra. (*fig.* 100.)

RÉSOLUTION.

Supposons que l'on demande un Quarré qui soit égal aux trois Quarrés A, B, C. Commençons par trouver une ligne qui soit le côté d'un Quarré égal aux deux Quarrés A, B. Pour cela, avec les deux côtés MF, FD des deux Quarrés A, B, faites le Triangle Réctangle MFD : il est certain que le Quarré fait sur l'hypothénuse MD, sera égal à la somme des Quarrés faits sur les deux autres côtés DF, FM, c'est-à-dire, à la somme des Quarrés A, B (n°. 293.) Après cela, sur une des extrémités M de l'hypothénuse MD, élevons perpendiculairement le côté MS du petit Quarré C, & tirons l'hypothénuse DS ; cette ligne DS sera le côté d'un Quarré égal à la somme des trois Quarrés A, B, C.

DÉMONSTRATION.

Le Triangle DMS étant Réctangle, le Quarré fait sur l'hypothénuse DS est égal à la somme des Quarrés faits sur les deux autres côtés MD, MS (n°. 293.) ainsi $\overline{DS}^2 = \overline{MD}^2 + \overline{MS}^2$: mais MD étant l'hypothénuse du Triangle Réctangle DFM, ou aura aussi $\overline{MD}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{FM}^2$; par conséquent $\overline{DS}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{FM}^2 + \overline{MS}^2 =$ les

trois Quarrés A + B + C; C. Q. F. D.

Si l'on avoit eu un quatrième Quarré, on en auroit élevé le côté à angles droits au point S de l'hypothénuse DS, & la nouvelle hypothénuse, qui en seroit venue, auroit été le côté du quarré égal aux quatre quarrés proposés, & ainsi de suite.

PROBLÊME.

327. Trouver un cercle égal à la somme des cercles P, S, ou égal à tant de cercles que l'on voudra. (*fig.* 101.)

RÉSOLUTION.

Elle est la même que celle du Problême précédent. Construisez donc un Triangle Réctangle ABD, dont les côtés AB, BD, soient les diamètres des cercles P, S donnés. Je dis que l'hypothénuse DA est le diamètre d'un cercle Y égal aux deux cercles P, S, ou, ce qui est la même chose, que le demi-cercle fait sur l'hypothénuse AD, est égal aux deux demi-cercles faits sur les deux diamètres AB, BD.

DÉMONSTRATION.

Il faut se rappeller le n°. 306. où il a été démontré que les surfaces des cercles sont entr'elles comme les Quarrés de leurs rayons ou de leurs diamètres; par conséquent $Y . S :: \overline{AD}^2 . \overline{AB}^2$. De même l'on a cette autre proportion, $Y . P :: \overline{AD}^2 . \overline{BD}^2$. Ainsi (n°. 255.) ajoutant par ordre, on aura $2Y . S + P :: 2\,\overline{AD}^2 . \overline{BD}^2 + \overline{AB}^2$. Et en divisant par 2 les antécédents (n°. 252.), on

à Y . S + P : : $\overline{AD}^2 . \overline{BD}^2 + \overline{AB}^2$: or (n°. 293.) $\overline{AD}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AB}^2$; donc aussi Y = S + P; c'est-à-dire, que le cercle Y, dont AD est le diamètre, vaut les deux cercles S, P; ainsi qu'il falloit le démontrer.

En peu de mots, les cercles sont entr'eux comme les Quarrés de leurs diamètres ; or le Quarré du diamètre du cercle Y vaut la somme des Quarrés faits sur les diamètres des cercles S, P; donc aussi le cercle Y est égal aux deux cercles S, P.

Par ce moyen, vous pourrez trouver un cercle égal à tant de cercles que vous voudrez : mais cette construction s'étend à toutes les figures semblables que l'on voudroit réduire en une seule de même surface ; puisque, généralement parlant, les figures semblables sont entr'elles comme les Quarrés de leurs côtés homologues.

C'est pourquoi, si l'on avoit deux Pentagones semblables, qu'il fallût réduire en un seul, on mettroit à angle droit deux côtés homologues, afin d'avoir un Triangle Réctangle, dont l'hypothénuse seroit le côté d'un Pentagone semblable aux deux autres, & égal à leur somme.

COROLLAIRE.

328. Quand le Triangle Réctangle DBA est isoscèle, si l'on construit des demi-cercles sur chaque côté, il en résulte la quadrature d'une portion de cercle. (*fig.* 102.)

DÉMONSTRATION.

Le demi-cercle fait sur l'hypothénuse DA est égal aux deux demi-cercles égaux faits sur les deux autres côtés : ainsi le demi-cercle de l'hypothénuse

est double du demi-cercle fait sur un côté D B; donc la moitié du demi-cercle de l'hypothénuse, c'est-à-dire, le quart de cercle B C D O, est égal au demi-cercle B S D: mais le quart de cercle B C D O, & le demi-cercle B D S, ont le segment B D O commun; par conséquent la partie B O D S, en forme de croissant, est égale au Triangle B C D. Or on a la quadrature du Triangle; par conséquent l'on a aussi la quadrature de la portion de cercle B O D S.

Cette portion de cercle quarrable est connue sous le nom de *Lunule d'Hypocrate*, Inventeur de cette quadrature. Il n'y a rien de plus élégant dans toute la Géométrie élémentaire; mais c'est une spéculation qui n'a guères d'autre usage que celui de plaire à l'esprit.

Le *Quarré de l'hypothénuse*, dont Hypocrate a fait usage pour la quadrature de sa Lunule, est aussi fort propre à l'élévation d'une perpendiculaire sur l'extrémité d'une ligne.

PROBLÊME.

329. Élever une perpendiculaire sur l'extrémité A d'une ligne A S, en faisant usage de la propriété du Quarré de l'hypothénuse. (*fig.* 103.)

RÉSOLUTION.

Marquez cinq parties égales à liberté sur la ligne donnée A S. Prenez avec le compas trois de ces parties, & du point A tracez un arc de cercle. Prenez ensuite cinq de ces parties, & mettant une des pointes du compas sur le point 4, décrivez un autre arc qui coupe le premier en un point O. De ce point menez au point A la ligne O A; elle sera perpendiculaire.

DÉMONSTRATION.

Tirez la ligne O 4 : si la ligne A O est perpendiculaire, le Triangle O A 4 doit être Réctangle ; & par conséquent le Quarré de l'hypothénuse O 4, doit être égal à la somme des Quarrés faits sur les deux autres côtés A O, A 4 ; or cela arrive véritablement : car (par la construction) l'hypothénuse étant 5, son Quarré = 25, & la somme des Quarrés des deux autres côtés est 9 + 16 = 25, valeur du Quarré de l'hypothénuse. Le Triangle est donc Réctangle en A, & par conséquent A O est une perpendiculaire ; C. Q. F. D.

PROBLÊME.

Deux cercles concentriques, ou qui ont le même centre, étant donnés, trouver le cercle auquel est égale la couronne circulaire, comprise entre les deux circonférences de ces cercles. (*fig.* G. *P L.* XI.).

RÉSOLUTION ANALYTIQUE.

Soit la circonférence du grand cercle = P ; son rayon = R ; son aire = $\frac{PR}{2}$ (n°. 202.) ; la circonférence du petit cercle = p ; son rayon = r ; son aire = $\frac{pr}{2}$. La couronne circulaire ou le cercle égal à cette couronne = O = $\frac{PR}{2} - \frac{pr}{2}$, étant évident que la couronne circulaire est égale à la différence du grand cercle au petit cercle. Menez le rayon C H. Vous aurez le Triangle Réctangle H D C, dont l'hypothénuse C H est le rayon du grand cercle, & le côté C D le rayon du petit : mais (n°. 327.) le cercle décrit avec l'hypothénuse C H vaut la somme des deux cer-

cles, dont l'un seroit construit avec le côté CD, & l'autre avec le côté DH, dont le cercle soit appellé M : ainsi $\frac{PR}{2} = \frac{p.r}{2} + M$, ou $\frac{PR}{2} - \frac{p r}{2} = M$; mais il est évident que $\frac{PR}{2} - \frac{p r}{2} = O$: donc $M = O$; C. Q. F. D.

PROBLÊME.

330. Réduire une figure quelconque ABCDFHL (*fig.* 104.) de grand en petit. C'est-à-dire, trouver une autre figure semblable, plus petite, qui ait avec elle un rapport quelconque.

RÉSOLUTION.

Prenons un cas particulier. Supposons qu'il s'agisse de réduire cette figure en une autre qui n'en soit que les $\frac{2}{5}$. Si donc on appelle la figure totale S, celle que l'on cherche doit être $\frac{2}{5}$ de S ou $\frac{2S}{5}$.

De l'angle A tirons des lignes qui divisent la figure proposée en Triangles. Puisque la figure que nous cherchons doit être semblable à celle-ci, il est nécessaire que les Triangles dont elle sera composée, soient semblables, chacun à chacun, à ceux de la figure proposée, & que de plus chaque Triangle ne soit que les $\frac{2}{5}$ de son correspondant. Cherchons donc un Triangle semblable à un des Triangles ABC de la figure, & qui ne soit que les $\frac{2}{5}$ de ce Triangle : nommons a le côté AB connu, & soit appellé x le côté homologue du Triangle cherché.

Faites bien attention que les figures semblables doivent être entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues (n°. 306.) ; nous aurons donc cette proportion, qui va résoudre le Problême : la figure donnée S est à la figure cherchée $\frac{2S}{5}$, comme

le Quarré aa du côté AB est au Quarré xx du côté homologue inconnu, ou simplement, S. $\frac{2S}{5}$ :: aa. xx. Et (en multipliant les deux premiers termes par 5 pour faire évanouir la fraction) 5 S. 2 S :: aa. xx. En les divisant maintenant par S, on a 5. 2 :: aa. xx; donc $2aa = 5xx$; par conséquent $xx = \frac{2aa}{5} = \frac{2a}{5} \times a$: d'où l'on tire $\frac{2a}{5}$. x :: x. a. C'est-à-dire, que le côté x homologue au côté AB est une moyenne proportionnelle entre le côté AB & la cinquième partie du double de ce côté : je porte donc cette moyenne proportionnelle sur le côté AB de A en b, & je tire par b la ligne bc parallèle à BC; ensuite par C la ligne cd parallèle au côté correspondant CD, par d la parallèle df, &c. comme on le voit dans la figure; ce qui donne une figure $bcdfghl$ tout-à-fait semblable à la grande; puisqu'à cause du parallélisme, tous les côtés de l'une sont proportionnels à tous les côtés de l'autre. Reste donc à démontrer qu'en conséquence de la construction, la petite figure n'est que les $\frac{2}{5}$ de la grande.

DÉMONSTRATION.

Puisque les figures semblables doivent être entr'elles comme les Quarrés de leurs côtés homologues, s'il est vrai que la petite figure soit les $\frac{2}{5}$ de la grande, il est aussi nécessaire que le Quarré xx du petit côté Ab ne soit que les deux cinquièmes du Quarré aa du côté homologue AB; or cela est ainsi (par la construction) : car $\frac{2AB}{5}$ $(\frac{2a}{5})$. Ab (x) :: Ab (x). AB (a); donc $\frac{2aa}{5} = xx$: où l'on voit que le Quarré xx du petit côté Ab est les $\frac{2}{5}$ du Quarré aa du grand côté AB; C. Q. F. D.

L'équation $xx = \frac{2aa}{5}$, que j'ai trouvée par une seule proportion, pouvoit être trouvée en faisant usage de deux proportions. La grande figure a été appellée S ; appellons f la petite figure cherchée. Puisque, suivant une des conditions du Problême, la petite figure doit être les $\frac{2}{5}$ de la grande, $f . S :: 2 . 5$; mais il y a une seconde condition, c'est que ces figures doivent être semblables. Or les figures semblables sont entr'elles comme les Quarrés des côtés homologues. Les Quarrés homologues ont été nommés a, x ; donc on a cette autre proportion, $f . S :: xx . aa$, & en rapprochant la première proportion $f . S :: 2 . 5$, on voit que deux rapports, égaux à un troisième rapport, sont égaux entr'eux. Donc $xx . aa :: 2 . 5$, d'où l'on tire, comme ci-dessus, $2aa = 5xx$, ou $xx = \frac{2aa}{5}$.

Remarquez que l'équation $xx = \frac{2aa}{5}$ est une équation générale qui résout tous les cas possibles de cette espèce : car si on vouloit que la figure cherchée fût les $\frac{7}{9}$ de la figure proposée, au lieu de $\frac{2}{5}$ mettant $\frac{7}{9}$ dans l'équation formulaire $xx = \frac{2aa}{5}$, elle deviendroit $xx = \frac{7aa}{9}$, & le Problême seroit résolu en faisant $\frac{7a}{9} . x :: x . a$; c'est-à-dire, en trouvant une moyenne proportionnelle entre le côté A B & la neuvième partie de son septuple, ou bien une moyenne proportionnelle entre le côté A B & les $\frac{7}{9}$ de ce côté : car $\frac{7a}{9}$ sont la même chose que $\frac{7}{9}$ de a. (a)

(a) La méthode ordinaire de résoudre les Problêmes précédens est d'abord d'en proposer la Résolution, sans faire voir comment on y a été conduit ; après quoi on démontre que la construction satisfait aux conditions du Problême. Nous avons pris une autre voie. Au lieu d'exposer une Résolution, nous la faisons découvrir ; comme on est obligé par-là de faire attention aux données du Problême, de marcher

PROB.

PROBLÊME.

331. On a souvent besoin de réduire un plan de fortification de grand en petit. Moyennant la résolution du Problême ci-dessus, la réduction s'en fait avec une très-grande facilité. Soit donc le plan d'un Quarré quelconque ABCD (*fig.* 105.) fortifié, qu'il s'agit de réduire en un autre plan trois fois plus petit.

RÉSOLUTION.

D'un point O, pris au-dedans de la figure, tirez les lignes OC, OS, OT, &c. à chaque angle. Appellons a le côté OC & x le côté homologue correspondant. Puisque la figure cherchée doit être à celle-ci, comme 1 est à 3, dans l'équation formulaire $xx = \frac{2aa}{5}$, mettez $\frac{1}{3}$ au lieu de $\frac{2}{5}$; elle sera $xx = \frac{aa}{3}$; donc $a . x :: x . \frac{a}{3}$. Ainsi le côté cherché homologue au côté OC est une moyenne proportionnelle entre a & $\frac{a}{3}$ ou le tiers de a; por-

de conséquence en conséquence, en se rendant compte à chaque instant de ce que l'on doit faire pour avancer, on s'accoutume insensiblement à faire usage de ses forces, & même à devenir Inventeur.

Ceux qui ont bien saisi l'esprit de cette méthode, ont souvent plutôt fait de résoudre une question par eux-mêmes, que d'en concevoir une résolution trouvée. Nous avons déja fait observer que l'on n'étoit pas Géomètre, quoique l'on sçût beaucoup de Géométrie; il n'est besoin pour cela que de connoître ce que les autres on découvert, de sçavoir historiquement un grand nombre de démonstrations, d'être au fait, s'il est permis de le dire, de ce que les autres ont pensé.

L'esprit de la Géométrie consiste dans l'art d'employer ce que l'on en sçait, pour découvrir ce que l'on ne sçait pas. On est très-avancé en Géométrie, quand on est parvenu à ce point; il n'y a plus, pour ainsi dire, qu'à se laisser aller pour devancer ceux qui en sçavent beaucoup. En effet on peut assurer que l'on sçait toutes les Mathématiques, quand on a l'instrument, & l'art de s'en servir. Ceux qui n'ont pas la vraie méthode sont toujours très-embarrassés, quand ils passent d'une partie des Mathématiques à une autre.

J'ai fait cette espèce de digression, afin que l'on conçoive qu'il est incomparablement plus avantageux de sçavoir bien la Géométrie, que d'en sçavoir beaucoup.

tez donc cette moyenne proportionnelle de O en *c*, & tirez *ct* parallèlement à CT, *ts* parallèlement à TS, & ainsi de suite, comme on l'a vû ci-dessus, & selon que la figure ABCD le représente. Il est visible que la petite figure *abcd* est tout-à-fait semblable à la grande figure ABCD : car, par la construction, les côtés de l'une sont proportionnels aux côtés de l'autre, à cause du parallélisme. De plus, la surface de la petite figure *abcd* n'est que le tiers de la grande figure, puisque, selon la construction, $OC . Oc :: Oc . \frac{OC}{3}$, d'où l'on tire $\frac{\overline{OC}^2}{3} = \overline{Oc}^2$; ce qui signifie que le Quarré du petit côté O*c* est le tiers du Quarré du grand côté OC homologue : mais les surfaces des figures semblables ont le même rapport que les Quarrés de leurs côtés homologues ; par conséquent la petite figure *abcd* n'est que le tiers de la grande ; C. Q. F. D.

Tout ce qu'il faut observer dans la pratique, c'est de bien prendre garde à quel Triangle répond chaque côté homologue. Revenons à la figure de ce Problême. Après avoir trouvé le point *c* du petit côté O*c*, homologue au grand côté OC, on doit tirer *ct* parallèlement au grand côté CT; mais par où le côté *ct* sera-t-il terminé ? Observez dans quel Triangle se trouve le grand côté CT; c'est dans le Triangle OCT : ainsi le petit côté *ct*, qui est homologue au grand côté CT, sera terminé par les deux côtés OC, OT du Triangle OCT. On aura la même attention, quand il s'agira de déterminer les autres côtés homologues.

PROBLÊME.

332. Réduire de petit en grand une figure quelconque selon tel rapport que l'on voudra. (*fig.* 106.)

RÉSOLUTION.

Elle est précisément la même que celle du Problême précédent. C'est uniquement pour le faire voir, que j'en donne un éxemple.

D'un point *o*, pris au-dedans de la petite figure, tirez à chacun de ses angles les lignes *oa*, *ob*, *oc*, &c. que vous prolongerez indéfiniment. Appellons *a* un de ces côtés *oa*, & nommons *x* le côté de la grande figure qui doit lui répondre ou lui être homologue. On veut une figure semblable qui soit quatre fois plus grande? Donc (n°. 306.) le Quarré de l'un de ses côtés doit être quatre fois plus grand que le Quarré du côté homologue de la petite figure proposée *abcdf*; on aura donc $xx = 4aa$; par conséquent $4a . x :: x . a$, où l'on voit que le côté de la grande figure homologue au petit côté *oa*, est une moyenne proportionnelle entre *oa*, & le quadruple de *oa*: portez donc cette moyenne proportionnelle de *o* en A sur le petit côté *oa* prolongé; & par ce point A tirez AB parallèlement au côté *ab*, & le reste, comme ci-dessus. La grande figure ABCDF, qui en résultera, sera non-seulement semblable à la petite figure *abcdf*, mais encore elle en sera le quadruple. Cela est trop évident pour avoir besoin de démonstration, après tout ce que nous avons dit.

En tirant des lignes dans un plan, pour le réduire en Triangles, & mener ensuite des parallèles, comme nous avons fait aux n°. 331, 332, la figure, dont on propose la réduction, deviendroit fort souvent, ainsi que la réduite, si chargée de lignes que la confusion & l'excessive longueur du travail en seroient presque inévitables. Quelques-uns prennent donc le parti de faire une échelle plus petite ou plus grande que celle du plan proposé,

ſelon qu'ils veulent l'avoir ou plus petit ou plus grand. Mais l'échelle a encore un inconvénient ; on n'y ſçauroit diſtinguer les petites parties, à moins que cette échelle ne ſoit conſidérablement longue ; & c'eſt préciſément ce que l'on cherche à éviter, quand il faut réduire de grand en petit. On tombe alors ſouvent dans le cas de ſe conduire par eſtime : mais, outre que l'eſtime n'eſt point Géométrique, elle éxige une très-longue pratique avant que l'on puiſſe compter ſur une éxactitude recevable.

Une méthode rigoureuſement & très-ſimplement démontrée, qui joindroit la plus grande juſteſſe à l'économie du tems, qui ſuppprimeroit la diviſion ou la graduation de l'échelle, qui n'éxigeroit, de la part du Praticien, aucune habitude antérieure, que celle de tracer une ligne droite & un cercle ; une méthode enfin, où l'on n'auroit jamais recours à l'eſtime, & qui ne feroit décrire aucune ligne ſur le plan à réduire, auroit des avantages bien réels ſur celles dont nous avons déja parlé, & ſur quelques autres, dont nous parlerons après. Or nous avons crû voir tous ces avantages réunis dans la méthode ſuivante.

On propoſe de réduire la figure ABCDLNT (*fig. X. PL.* 21.) en une autre ſemblable & plus petite A*bcdlnt*, dont le circuit ſoit à celui de la première : : A*b*.AB ; c'eſt-à-dire, que chaque côté de la grande ſoit toujours à ſon homologue dans la petite : : AB . A*b*.

Pour y parvenir, on tracera une ligne indéfinie AE (*fig. Y.*), ſur laquelle on portera le côté AB de la figure *x* de A en Q ; & de ce point A, avec AQ l'on tracera l'arc indéfini QG ; prenant enſuite A*b* de la figure X, on le portera ſur l'arc QG de Q en Z, & par les points A, Z, l'on me-

nera l'indéfinie A S ; ce qui donnera l'angle E A S, que j'appellerai dans la suite *angle réducteur.* ; où l'on voit que le rayon A Q, & la corde QZ sont les deux termes du rapport, dans lequel on veut que soient les côtés homologues de la proposée & de la réduite; puisque (const.) A B de la figure X a été fait = AQ de la figure Y, & A *b* = QZ. Vous avez alors tous les préparatifs de votre réduction. Car, si vous voulez placer comme il faut, dans la figure cherchée, le côté B C de la Proposée, suivant le rapport donné ; vous prendrez B C avec un compas ordinaire, vous le porterez sur la figure Y de A en M, & avec A M, du point A, vous tracerez l'arc M T O ; prenant ensuite la corde M O de cet arc, vous irez au point *b* de la figure X décrire un arc indéfini, dont M O soit le rayon ; & cette ligne M O donnera la vraie longueur du côté cherché de la Réduite, correspondant au côté B C de la Proposée. Et pour déterminer, dans la Réduite, la position du point C de la proposée, vous procéderez précisément, comme vous venez de faire ; c'est-à-dire que, prenant avec un compas la distance A C de la figure X, vous la porterez de A en D sur la figure Y ; & du point A, avec ce rayon A D, vous tracerez l'arc D H L entre les côtés de l'angle réducteur, comme vous avez déja fait pour l'arc M T O ; prenant ensuite la corde D L de cet arc avec le compas, vous reviendrez en poser une des pointes à l'angle A de la figure X, pour tracer un arc, dont cette corde D L sera le rayon. Ce nouvel arc coupera le premier tracé du point *b* avec la corde M O, & son intersection *c* déterminera la position du point C de la Proposée dans la Réduite.

DÉMONSTRATION.

Car, afin d'éviter la confusion des lignes dans la

figure X, si vous imaginez les lignes A C, A c; elles donneront les Triangles A B C, A b c, qui seront équiangles. Pour le comprendre, vous n'avez qu'à vous rappeller que A B (*fig.* X) = A Q de la figure Y ; & que A b de la première = Q Z de la seconde ; pareillement que B C de la figure X = A M de la figure Y ; & aussi que A C de la première = A D de la seconde. Or, il est évident, dans la figure Y, que les Triangles A M O, A Q Z sont équiangles; donc A M. M O : : A Q. Q Z, ou (*fig.* X) : : A B. A b; mais (*conſt.*) A M de la figure Y = B C de la figure X; & M O de la première = b c de la seconde : ainsi, dans la figure X, B C. b c : : A B. A b.

Vous trouverez de même (*fig.* Y), que les Triangles A D L, A Q Z sont équiangles ; & qu'ainsi A D. D L : : A Q. Q Z : : A B. A b. Or (*conſt.*) A D de la figure Y = A C de la figure X, & D L de la première = A c de la seconde ; donc : : A C. A c : : A B. A b; & par conséquent (*fig.* X) les trois côtés du Triangle A B C sont proportionnels aux trois côtés du Triangle A b c, chacun à chacun ; l'angle B du premier est donc égal à l'angle b du second ; & le côté b c a précisément la même position que le côté B C ; ils sont d'ailleurs entr'eux dans la raison proposée ; l'on a donc tout ce que l'on demandoit par rapport à ces deux côtés. Ce qui est incomparablement plus court à pratiquer qu'à décrire & à démontrer.

Voulez-vous avoir présentement, dans la Réduite, la grandeur & la position du côté C D de la Proposée ? Prenez C D avec le compas, portez-le sur Y de A en N, & du point A, avec A N, décrivez l'arc N G K ; prenez-en la corde N K, & avec cette corde, du point c de la figure X, décrivez un arc indéfini. Ensuite prenez B D dans la

même figure; portez-la de A en R ſur Y; & avec A R, du point A, décrivez l'arc R P V; prenez-en la corde R V, &, avec cette corde, du point *b* de la figure X décrivez un arc, qui coupera en un point *d*, celui qui a été décrit du point *c*, avec la corde N K de la figure Y. Si vous tirez alors *c d*, elle ſera le côté correſpondant à C D. Ce qui ſe démontre comme le cas précédent; & ainſi des autres.

Pour ſe bien conduire dans cette pratique, les Commençans obſerveront que, ſi un côté de la Propoſée eſt le rayon d'un arc dans l'angle réducteur, la corde de cet arc eſt préciſément la longueur du côté correſpondant dans la Réduite; & qu'il ne s'agit plus que d'en déterminer la poſition, par le moyen d'un Triangle.

On remarquera auſſi que les lignes ponctuées de la figure X, & les cordes de la figure Y, ne doivent point ſe tracer dans la pratique; elles ne paroiſſent ici que pour faire voir la réduction des figures en Triangles, & démontrer la certitude de la méthode. Par éxemple, la ligne C L n'eſt tracée dans la figure X que pour déſigner l'ouverture du compas de C en L, afin de déterminer la poſition du côté D L.

Que la figure réduite ſoit à placer ſur un autre papier & dans un autre angle de la Propoſée, cela n'y fait rien; la méthode & l'opération ſont abſolument indépendantes de ces circonſtances.

Il ne nous reſte plus qu'à donner un expédient aux Commençans, pour les tirer d'embarras lorſqu'ils auront une figure à transformer de petit en grand. Car la méthode dont on vient de faire uſage, pourroit quelquefois leur paroître impoſſible. Si l'on vouloit, par éxemple, transformer en grand la figure *m r p f g s k*, dans le rapport de A *m* à AM,

de manière que A M fût plus que le double de A *m*; en portant A *m* sur l'angle réducteur (*fig*. Z) de A en R, & traçant une circonférence avec A R, on ne pourroit pas porter le côté A M de la figure X sur cette circonférence, puisqu'il est impossible d'y porter plus que son diamètre ou le double de son rayon. On n'y portera donc que la moitié, ou le tiers, ou le quart, &c. de A M, selon que le permettra la grandeur de la circonférence décrite avec A R = A *m* de la figure X. Dans le cas présent, on a porté A H, moitié de A M, de R en O (*fig*. Z), de manière que A M = 2 R O; & par O l'on a mené A O, pour avoir l'angle réducteur R A O, dont on se servira comme ci-dessus, pour faire la transformation proposée, en ayant la simple attention de doubler les cordes qui viendront, à chaque nouvel arc que l'on tracera dans l'angle réducteur. On tripleroit, on quadrupleroit ces cordes, si on n'avoit pris que le tiers ou le quart de A M, &c. Si l'on veut avoir, par éxemple, dans la Réduite M R P F G S K (*fig*. X) la grandeur & la position du côté *m r* de la Proposée, on prendra *m r* avec le compas; on la portera de A en S (*fig*. Z); & avec A S, du point A, on décrira l'arc S L; on en prendra la corde S L qu'on doublera, en faisant deux portées de compas sur une ligne droite tracée à liberté: l'ouverture du compas étant double de S L, on en mettra une des pointes en M de la figure X, & l'on tracera avec l'autre un arc indéfini, & le rayon de cet arc sera la longueur du côté de la Réduite, homologue au côté *m r* de la Proposée. Pour en avoir la vraie position dans la Réduite, on prendra la distance A *r* dans la Proposée; on la portera de A en V (*fig*. Z), & avec A V, du point A, on tracera, dans l'angle réducteur, l'arc V T; on en prendra la corde V T, que l'on

doublera, comme ci-dessus; & avec cette corde doublée, du point A de la figure X, on tracera un autre arc indéfini qui coupera en R, celui que l'on a déja tracé du point M, avec le double de la corde S L de la figure Z; ce qui donnera la vraie position de MR dans la Réduite, homologue à *mr* de la Proposée, & telle que MR. *mr* : : AM. A*m*, ainsi qu'on l'a demandé. Mais il faut bien se rappeller, pour la Démonstration, que MR (*fig*.X) = 2 S L (*fig*. Z), & que A R de la première = 2 V T de la seconde.

DÉMONSTRATION.

Il est clair (*fig*. Z) que A R est à la corde RO comme AS est à la corde S L. Or (const.) A R (*fig*.Z) = A *m* (*fig*.X); & AS de la première = *mr* de la seconde. Donc A*m*. RO : : *mr*. SL, ou A*m*. 2RO : : *mr*. 2 S L. Mais (const.) 2 R O (*fig*.Z) = A M (*fig*.X); & 2 S L de la première = MR de la seconde; par conséquent (*fig*.X) A*m*. A M, : : *mr*. M R, ou, ce qui est la même chose, MR. *mr* : : AM. A*m*. En imaginant, dans la figure X, les lignes A R, A*r*, on démontrera, comme ci-dessus, que AR. A*r* : : AM. A*m*, & qu'ainsi les Triangles M A R, *m* A *r*, ont leurs côtés proportionnels, chacun à chacun; d'où il suit que l'angle M = *m*; & par conséquent MR de la Réduite a la même position que *mr* de la Proposée: d'un autre côté ces deux lignes sont dans le rapport proposé; l'on a donc tout ce que l'on demandoit; & c'est, en suivant cette méthode, que l'on achèvera la Réduite MRPFGSK.

Quelques Praticiens renferment la figure à réduire dans un Quarré ou dans un Réctangle, & ils le divisent en petits Quarrés; ils font après cela, sur un autre papier, un Quarré ou un Réctangle

plus grand ou plus petit que le proposé, selon qu'ils le veulent avoir ou plus grand ou plus petit; ils divisent ce nouveau Réctangle dans le même nombre de petits Quarrés que la figure à réduire: après quoi ils dessinent dans chaque petit Quarré de ce nouveau Réctangle, tout ce qu'ils voyent renfermé dans chaque petit Quarré correspondant de la figure proposée. Mais, pour être sûr de la justesse d'une pareille Réduite, il faudroit que les yeux fussent des juges aussi éxacts que le compas. Cette méthode n'est donc qu'une approximation, & doit être absolument rejettée en Géométrie, à moins qu'on ne lui en associe quelqu'autre qui en corrige l'incertitude.

Pour réduire un plan de grand en petit, il n'est pas nécessaire d'avoir tous les côtés de la figure que l'on veut réduire; il suffit d'en connoître quelques lignes & les angles formés sur cette ligne, comme nous allons le faire voir, en exposant la méthode de lever le plan d'une campagne, d'un pays, &c. ce qui n'est qu'une pure réduction de grand en petit. Or, lever le plan d'un pays, & en faire la Carte, c'est représenter sur le papier tous les endroits remarquables, comme les montagnes, les rivières, les châteaux, les grands-chemins, les villages, &c. que ce pays contient. Il n'est point question ici de la Carte générale d'un grand Royaume, où l'on a coutume de faire usage des connoissances Astronomiques. On se propose seulement de faire voir que par le simple secours des Triangles proportionnels, on peut lever tout un pays, montrer la situation de ses différentes parties, faire connoître le rapport de leurs distances; ensorte que la seule vûe d'un plan d'une campagne puisse faire juger sûrement de la disposition & de l'éloignement réciproque des différens endroits, que l'on juge à propos d'y repré-

senter. Car c'est au dessein à en montrer les élévations & les enfoncemens par le moyen de la lumière & des ombres.

PROBLÊME.

333. Lever le plan ou faire la Carte d'un pays ou d'une campagne, telle que la représente la figure ABCD, &c. (*fig.* 111.)

RÉSOLUTION.

On choisira une ligne ou une distance OP (*a*), la plus grande que l'on pourra, sur les extrémités de laquelle on fera les opérations que je vais décrire. Il faudra placer horisontalement le Graphomètre à l'une des extrémités O, & alligner son diamètre à l'autre extrémité P, où l'on doit avoir planté un piquet. Après cela, on visera aux points A, B, C, D, F, G, H, & on marquera avec beaucoup d'attention les angles AOP, BOP, COP, &c. que les rayons visuels OA, OB, OC, &c. menés aux points A, B, C, &c. feront avec la base OP. On transportera ensuite l'instrument à l'autre extrémité P de la base OP; on le placera toujours bien horisontalement, & l'on allignera son diamètre au point O: ensuite avec l'alidade ou la règle mobile on visera, comme ci-dessus, aux mêmes points A, B, C, &c. on marquera, avec la plus grande éxactitude possible, les angles que les rayons visuels, dirigés à ces points, feront au point P de la base OP.

Nous n'avons point parlé des points E, K, parce que les angles qu'ils font avec la base OP sont trop obtus; mais, voici comment on les déterminera. Pour le point E, on se servira de la ligne DP,

(*a*) Cette ligne OP est ordinairement appellée *base*.

Sur ses extrémités D, P, on prendra la valeur des angles DPE, PDE.

Prenant ensuite AO pour base, afin de déterminer le point K, on travaillera à connoître les angles OAK, KOA, que l'on écrira avec soin. Enfin on mesurera la base OP, que je suppose de 500. toises.

Toutes ces opérations finies, on peut construire à son aise sur une Carte le plan dont on a besoin : car l'on a présentement tout ce qu'il faut pour cela. On prendra donc une ligne *op* que l'on divisera en 500 petites parties. Elle représentera la grande base OP de 500 toises, prises sur le terrein, & de plus elle pourra servir d'échelle pour mesurer la distance réciproque des différens endroits, qui doivent être représentés sur la Carte. On fera ensuite aux extrémités *o*, *p*, de cette petite ligne les mêmes angles que l'on aura trouvés sur la grande base OP, c'est-à-dire, que l'on fera les angles *aop* = AOP, *bop* = BOP, *cop* = COP, *dop* = DOP; & puis *opa* = OPA, *opb* = OPB, *opc* = OPC, *opd* = OPD; ce qui déterminera les lieux *a*, *b*, *c*, *d*, sur la Carte, aussi-bien que la distance *pd*, aux extrémités *p*, *d*, de laquelle on fera les angles *dpe*, *pde*, égaux aux angles DPE, PDE, faits sur la ligne PD du terrein; les côtés *pe*, *de* de ces angles, détermineront par leur intersection le point *e* correspondant à l'endroit E sur le terrein. On continuera de faire les angles *opf* = OPF, *opg* = OPG, *oph* = OPH; ensuite *pof* = POF, *pog* = POG, *poh* = POH: ces angles détermineront, par l'intersection de leurs côtés, les lieux *f*, *g*, *h*, & il ne restera plus que le point *k* à trouver. On agira à son égard, comme l'on a fait par rapport au point *e*, c'est-à-dire, que sur la ligne *oa* qui a été déterminée, on fera les angles *aok*,

o a k égaux, chacun à chacun, aux angles AOK, OAK formés sur la distance OA; l'intersection des côtés *o k*, *ak*, déterminera le point *k* du plan, & la Carte sera achevée.

DÉMONSTRATION.

Il faut prouver que tous les points *a*, *b*, *c*, &c. trouvés, ainsi que nous venons de l'enseigner, représentent non-seulement la situation des lieux A, B, C, &c. les uns à l'égard des autres, mais encore leurs distances réciproques.

Nous avons dit que les figures semblables étoient celles dont tous les angles étoient égaux, chacun à chacun, & les côtés des angles correspondans proportionnels: or c'est ce que nous avons éxécuté en construisant la petite figure *a b c d e*, &c. puisque tous les Triangles qui la composent, sont semblables à tous les Triangles dont est composée la grande figure du terrein, chacun à chacun. Ce que je vais faire voir, en prenant seulement les deux Triangles correspondans *a o p*, AOP, parce que tous les autres ont été construits de la même façon.

Il est certain (n°. 285.) que deux Triangles sont semblables, quand deux angles de l'un sont égaux à deux angles de l'autre, chacun à chacun: or tels sont les Triangles *a o p*, AOP, puisque (par la const.) l'angle *a o p* = AOP, & l'angle *o p a* = OPA; donc le troisième angle est égal au troisième angle, & les deux Triangles sont équiangles; par conséquent ils ont leurs côtés proportionnels. Si vous dites la même chose des autres Triangles correspondans, vous concevrez aisément que la petite figure de la Carte est un modèle du terrein que l'on s'est proposé de représenter.

Ainsi, quand on voudra sçavoir la distance d'un endroit à l'autre, par exemple, de A en B, on

prendra avec un compas la distance ab ; on la portera sur la ligne op qui sert d'échelle, à cause que nous l'avons divisée en 500 petites parties ; & l'on jugera, par le nombre des parties que la ligne ab prendra sur l'échelle, de la distance du point A au point B.

Car, supposons que ab contienne 130 petites parties de la base ou de l'échelle op ; je dis que la distance du lieu A au lieu B = 130 toises. Vous n'avez qu'à considérer les deux Triangles aob, AOB ; il est aisé de prouver que ces deux Triangles sont semblables, ou que les côtés de l'un sont proportionnels aux côtés de l'autre : car, 1°. (par la construction) l'angle aop = AOP, & l'angle bop = BOP ; donc $aop - bop (aob)$ = AOP — BOP (AOB) ; l'angle aob est donc égal à l'angle AOB.

Mais de plus, les deux Triangles apo, APO semblables (par la construction) donnent op . OP :: oa . OA : par la même raison les deux Triangles semblables bpo, BPO, donnent aussi op . OP :: ob . OB ; & comparant cette dernière proportion avec la première, on voit que oa . OA :: ob . OB, puisque les deux rapports de cette proportion sont égaux au rapport de op à OP.

Donc, 2°. les côtés oa, ab, de l'angle aob, sont proportionnels aux côtés OA, AB, de l'angle AOB = aob : or (n°. 284.) deux Triangles sont semblables, quand ils ont un angle égal & les côtés qui forment cet angle proportionnels. Par conséquent les deux Triangles aob, AOB, sont semblables ; donc les côtés opposés aux angles égaux sont proportionnels ; ainsi ab . AB :: ao . AO : or ao . AO :: op . OP ; donc ab : AB :: op . OP. Mais op (supp.) représente OP ; par conséquent ab représentera AB : ainsi les

130 parties de *ab* seront l'expression des 130 toises contenues dans la longueur AB.

Cette méthode est donc très-propre à faire connoître la distance réciproque des lieux qu'on lève sur le terrein.

334. J'ai dit qu'il ne falloit pas prendre des angles trop obtus, ni par conséquent des angles trop aigus; c'est que la même erreur, commise en prenant des angles très-aigus ou très-obtus, produit un inconvénient beaucoup plus considérable, qu'il ne le seroit en prenant des angles d'une grandeur moyenne.

Pour en avoir une preuve bien sensible, supposons que du point O (*fig.* 107.), l'on voye la distance A*b* sous l'angle *b*OA, qui est passablement aigu; & que du même point O la distance AB = A*b* soit vûe sous l'angle très-aigu BOA. Il est évident que si l'angle *b*OA est pris trop grand de la quantité *b*O*x*, l'erreur que l'on commettra sur la longueur A*b*, sera exprimée par *bx*; mais si on fait la même faute en prenant l'angle BOA, c'est-à-dire, qu'on le prenne trop grand de la quantité BOS = *b*O*x*, l'erreur sera BS incomparablement plus grande que *bx*; ce que je laisse à démontrer rigoureusement à ceux qui ne seront pas assez convaincus par le témoignage des sens.

335. Nous avons aussi fait observer que le Graphomètre devoit être placé très-horisontalement, afin que les endroits qu'on lève, se trouvant toujours dans un plan parallèle à l'horison, soient aussi toujours à égale distance, soit que l'on vise à des points de ces objets plus hauts, soit que l'on alligne à des points plus bas. Imaginez-vous que la ligne AB (*fig.* 108.) soit une ligne horisontale au-dessus de laquelle s'élèvent verticalement les objets AS, BO. Du point *x* élevé au-dessus du point A, où

eſt placé le pied de votre Graphomètre, viſez horiſontalement à un point y de l'objet B O : tranſportez enſuite votre inſtrument au point B; diſpoſez-le horiſontalement, & ſuppoſons qu'il s'élève juſqu'au point t plus haut que le point y. De ce point t viſez à l'objet A S : le rayon viſuel tr rencontrera un point r plus haut que le point x de l'objet A S; mais cela ne changera en rien la diſtance de l'objet A S à l'objet B O : car, à cauſe du parallèliſme des lignes AB, xy, cette diſtance ſera toujours la même, ſoit qu'on la prenne ſur xy ou ſur rt, puiſque $xy = rt$.

Cependant ce que nous venons de dire, ne peut regarder que des objets qui ſont peu élevés au deſſus de l'horiſon. S'il falloit auſſi marquer ſur la Carte la diſtance d'une haute montagne à une baſe quelconque, on s'y prendroit de la manière ſuivante.

PROBLÊME.

336. Déterminer la diſtance d'une montagne MS aux points O, P de la baſe O P. (*fig.* 109.).

RÉSOLUTION.

On placera, comme ci-deſſus, le Graphomètre ſucceſſivement aux points O, P, & ſon diamètre horiſontalement dans la direction de la baſe O P; alors on fera hauſſer le plan du Graphomètre juſqu'à ce que l'on apperçoive le ſommet M de la montagne dans la direction de l'Alidade, c'eſt-à-dire, que le plan du Graphomètre prendra une inclinaiſon telle que, ſi on le prolongeoit, il paſſeroit par le ſommet M de la montagne. L'inſtrument dans cette ſituation fera connoître les angles M O P, M P O, leſquels rapportés aux extrémités o, p, de la petite baſe op de la Carte, donneront par l'interſéction

section de leurs côtés les distances *o m*, *p m* du sommet *m* de la montagne aux points *o*, *p* de la base *o p*; puisque les triangles M O P, *m o p* étant équiangles, leurs côtés homologues sont proportionnels; & par conséquent *o m* représentera O M, & *p m* répondra à la distance P M sur le terrein.

Mais O M n'est pas la distance de la montagne au point O, ni P M celle de la même montagne au point P. Représentez-vous une verticale M S, ou une ligne qui tombe du sommet M perpendiculairement à l'horison. Si des points O, P, vous imaginez les horisontales O S, P S, qui soient par conséquent perpendiculaires à la verticale M S, ces horisontales marqueront la véritable distance de la montagne aux points O, P; parce que la distance d'un point à un objet, doit nécessairement s'estimer par la perpendiculaire menée de ce point sur la longueur de l'objet (n°. 37.).

Ce sont donc les distances O S, P S, que nous avons à déterminer. Pour cela, aux points O, P, on disposera verticalement le plan du Graphomètre, dont le diamètre doit être horisontalement dirigé vers la montagne, afin de pouvoir prendre les angles M O S, M P S, que les lignes M O, M P, font avec les horisontales O S, P S; alors dans les triangles réctangles O M S, P M S, vous connoîtrez tout ce qui est nécessaire pour déterminer sur la Carte, non-seulement les distances O S, P S, mais encore la verticale M S : car en faisant l'angle *m o s* = M O S, & l'angle *m p s* = M P S, l'intersection des deux côtés *o s*, *p s*, donnera le point *s* de la verticale *m s*; ainsi les lignes *o s*, *p s*, *m s*, de la Carte feront connoître les distances O S, P S, & la hauteur MS imaginées sur le terrein. Ce qui est évident, puisque les triangles de la petite figure sont semblables à ceux de la grande, chacun à chacun;

eſt placé le pied de votre Graphomèt figures précé-
riſontalement à un point *y* de l'ob préſentation per-
portez enſuite votre inſtrument plus propre à faire
ſez-le horiſontalement, & fait, qu'à donner la
juſqu'au point *t* plus haut qu que l'on cherche.
t viſez à l'objet A S : le r ſe les déterminer au juſte
un point *r* plus haut q ir trouvé l'hypothénuſe *o m*
mais cela ne changer *o s m*, ſur cette hypothénuſe
A S à l'objet B O rcle ; & faiſant au point *o* un an-
lignes A B, l'angle M O S, que vous aurez
même, ſoit rein, la circonférence du cercle dé-
puiſque *x* ôté *o s* du triangle réctangle *o s m* ſem-
Cepe grand triangle rectangle O S M. Vous
regar par la même méthode, la longueur du
ſus *s*, c'eſt-à-dire, en décrivant un cercle ſur
l othénuſe *p m* du triangle réctangle *p s m*, &
ant au point *p* l'angle *s p m* égal à l'angle S P M
rouvé ſur le terrein : car le côté *p s* ſe trouvera
déterminé par la circonférence du cercle.

Les deux côtés *o s*, *p s* une fois trouvés, il ſera facile de les diſpoſer ſur la baſe *o p* (*fig.* 110.) dans la ſituation qui leur convient, puiſqu'il ne ſera plus queſtion que de faire un triangle avec les trois lignes *o p*, *o s*, *p s*; & le point *s* ſera placé ſur la Carte où il doit être.

337. Il n'eſt pas toujours néceſſaire d'établir une baſe ſur le terrein pour déterminer la diſtance

(*a*) *Repréſentation perſpective*, c'eſt-à-dire, une repréſentation des objets tels qu'ils paroiſſent aux yeux, & non pas tels qu'ils ſont en effet ; cela vient de ce que l'on eſt obligé de tracer ſur un plan des lignes qui ſont dans différents plans, lorſqu'on les conſidère en nature : d'où il arrive ſouvent qu'un angle, repréſenté ſur le papier, eſt renfermé dans un autre, qui eſt pourtant plus petit que lui, pris ſur le terrein. Afin que les Commençans conçoivent comment cela peut ſe faire, il eſt à propos de diſpoſer des objets de manière qu'ils produiſent aux yeux l'effet dont nous venons de parler. On leur fera remarquer comment les lignes qui forment des angles, viennent s'arranger ſur le papier, c'eſt-à-dire, ſur le *Tableau où elles ſe repréſentent*.

certains endroits à un point donné. Si l'on conſoit, par exemple, la diſtance de A en B, (*fig.*) de B en D, de D en A, & qu'étant placé int quelconque C, d'où les objets A, B, D les, on voulût ſçavoir combien on eſt éloi- objets, on pourroit ſe paſſer de baſe, en ; que les trois diſtances A B; B D; D A onnées, il eſt d'abord facile de les repréſen- ur une Carte, moyennant le triangle ſemblable *a b d* (*fig.* 113.), conſtruit ſur une échelle; dont on prendra autant de parties pour chaque côté qu'il y aura de toiſes dans chaque diſtance correſpondante.

Je remarque enſuite que du point C donné ſur le terrein, on peut connoître les angles A C D; A C B (*fig.* 112.), dont les côtés A D, A B ſont les baſes; par conſéquent, ſi dans le triangle *a b d* (*fig.* 113.) je puis trouver un point *o*, d'où tirant les lignes *o a*, *o b*, *o d*, l'angle *a o d*, oppoſé au côté *a d*, ſoit égal à l'angle A C D, oppoſé à la diſtance A D correſpondante, & l'angle *a o b* ſoit égal à l'angle A C B oppoſé au côté A B, repréſenté par le petit côté *a b*, il eſt certain que le point *o* ſera déterminé dans la Carte; de même que le point C l'eſt ſur le terrein, ainſi que je le démontrerai rigoureuſement plus bas.

Mais *a d* peut être conſidéré comme la corde d'un cercle qui paſſeroit par les trois points *a*; *o*, *d*; & cette corde retranche un ſegment capable de l'angle *a o d* = l'angle A C D donné. De même le côté *a b* peut être auſſi conſidéré comme la corde d'un cercle, dont la circonférence paſſe par les trois points *a*, *o*, *b*; d'où l'on voit que cette corde *a b* retranche un ſegment capable de l'angle *a o b* = l'angle A C B donné; le point *o* d'interſection des deux circonférences eſt donc le point qui ſatiſ-

fait à la question. Ainsi le Problême se réduit à construire sur une ligne donnée un segment de cercle capable d'un angle donné.

PROBLÊME.

338. Sur la ligne donnée *a b* (*fig.* 114.) construire un segment de cercle capable de l'angle donné M, c'est à-dire, construire un segment dans lequel on puisse inscrire un angle égal à l'angle donné M.

RÉSOLUTION.

Au point *a* de la ligne *a b* (*fig.* 114.) faites l'angle *b a s* égal à l'angle donné M. Au même point *a* sur le côté indéfini *a s* élevez la perpendiculaire *a o*, que vous prolongerez jusqu'à ce qu'elle coupe, au point *o*, la perpendiculaire *t o* élevée sur le milieu de la ligne *a b* donnée. De ce point *o* avec le rayon *o a* décrivez une circonférence de cercle, laquelle passant nécessairement par les points *a*, *b*, produira le segment *a x b*, dans lequel on pourra inscrire un angle égal à l'angle donné M.

DÉMONSTRATION.

D'un point quelconque *x* du segment *a x b* tirez les cordes *x a*, *x b*, afin d'avoir l'angle *a x b* inscrit dans le segment trouvé ; il s'agit de prouver que cet angle est égal à l'angle donné M : or c'est ce qui est évident. Car, puisque (par la const.) *a o* est perpendiculaire sur *a s*, la circonférence décrite du point *o* avec le rayon *a o* touche la ligne *a s* (n°. 105.) ; par conséquent l'angle *a x b* = l'angle *b a s*, parce que chacun de ces angles a pour mesure la moitié du même arc *a b* qui passe entre ses côtés (n°. 103 & 105.) ; mais (par la const.) l'angle *b a s* = M ; donc l'angle *a x b* est aussi = M, & par con-

séquent l'on a construit sur la ligne *a b* un segment de cercle capable de l'angle donné M, ainsi qu'on le demandoit; C. Q. F. D.

Je ne crois pas, 1°. qu'il soit nécessaire de prouver que les perpendiculaires *a o*, *t o* doivent se rencontrer : on voit bien que l'angle *o a s* étant droit, l'angle *o a b* est aigu, & qu'ainsi *o a* s'incline sur *a b* vers la perpendiculaire *t o*, qu'il doit enfin rencontrer.

2°. On comprend assez, sans que j'en avertisse, que la circonférence décrite du point *o* avec le rayon *o a*, doit passer par l'autre point *b* de la ligne donnée *a b*; puisque (par la const.) tous les points de la perpendiculaire *t o* sont à égale distance des points *a*, *b*.

Revenons présentement à la figure 113. Après avoir construit, comme nous l'avons dit, le petit triangle *a b d*, semblable au grand triangle A B D, sur le côté *a d* on construira un segment de cercle capable de l'angle donné A C D, & sur le côté *a b* on construira de même un segment de cercle capable de l'angle donné A C B; ces deux cercles se couperont au point *o* cherché. Ainsi en tirant les lignes *o a*, *o b*, *o d*, & les portant sur l'échelle qui a servi à la construction du triangle *a b d*, elles feront connoître les distances C A, C B, C D, que l'on se proposoit de découvrir; ce qui ne paroît pas avoir besoin d'autre démonstration.

Mais comme les vraisemblances & la déposition des sens sont des témoins qu'on récuse fort souvent en Géométrie, on va démontrer rigoureusement, que les lignes *a o*, *o d*, *o b* du plan sont proportionnelles aux distances C A, C D, C B que l'on veut connoître.

DÉMONSTRATION.

Par les points A, C, B de la Fig. 112. imaginez la circonférence ACBFA, ainsi qu'on en a fait passer une par les points *a*, *o*, *b* de la Fig. 113. Prolongez DC jusqu'à la rencontre de la première en F, & menez les cordes FA, FB; de même, prolongez *do* jusqu'à la rencontre de la seconde circonférence en *f*, & menez aussi les cordes *fa*, *fb*. Après cela, vous trouverez que les Triangles ABF, *abf*, sont équiangles. Car (par la const.) les angles ACD, *aod*, étant égaux, leurs suppléments ACF, *aof*, le seront aussi; &, par la même raison, l'angle BCF = *bof*. Mais l'angle ABF = l'angle ACF, parce qu'ils ont leur sommet à la circonférence, & qu'ils sont appuyés sur le même arc AF. Par la même raison l'angle *abf*, = *aof*; donc, puisque ACF = *aof*, ainsi qu'on vient de le voir, on aura ABF = *abf*. Si l'on fait le même raisonnement, on s'appercévra que l'angle BCF = BAF, & aussi que l'angle *bof* = *baf*: mais on a vû que BCF = *bof*; donc BAF = *baf*. Ainsi les Triangles ABF, *abf* sont équiangles; ce qui donne AF . *af* : : AB . *ab*; mais (const.) AB . *ab* : : AD . *ad*; donc AF . *af* : : Ad . *ad*. De plus l'angle DAF = *daf*. Car DAB = *dab* (const.). & l'on vient de voir que BAF = *baf*; ainsi les deux triangles DAF, *daf* sont équiangles (n°. 284.), c'est-à-dire que l'angle ADF = *adf*; ce qui rend aussi semblables les deux Triangles DCA, *doa*, à cause de l'angle ACD = *aod* (supp.); donc AD . *ad* : : AC . *ao* : : CD . *od*, & aussi : : CB . *ob* (à cause des Triangles équiangles DCB, *dob*); & c'est tout C. Q. F. D.

Le point C de la Fig. 112. pouvant être situé sur quelqu'un de ses côtés ou au-dehors, j'en détaillerai toutes les circonstances dans la Trigonométrie par les sinus, qui est à la fin de cet Ouvrage.

Les Problêmes précédens ont dû nous convaincre suffisamment de l'extrême utilité des triangles semblables, soit dans les recherches, où l'on se propose de faire quelques découvertes, soit dans l'application de la Géométrie aux Arts de la société, qui sont aux hommes une source perpétuelle de commodités & d'agrémens ; c'est pourquoi nous allons terminer ce Livre par deux Problêmes dont l'usage est assez fréquent.

PROBLÊME.

339. Couper une ligne A B en parties proportionnelles aux parties D C, C F, F G, &c. de la ligne D G. (*fig.* 115.).

RÉSOLUTION.

Avec la ligne D G faites le triangle équilatéral D O G; du point O portez la ligne A B de O en A & B sur les côtés O D, O G; tirez A B. Après cela menez aux points de division C, F, les lignes O C, O F. Ces lignes couperont la ligne A B en parties AM, MT, TB, proportionnelles aux parties DC, CF, FG, de la ligne DG; c'est-à-dire, que l'on aura A M. D C : : M T. C F : : T B. F G.

DÉMONSTRATION.

Le triangle O D G est équilatéral (par la const.); & de plus O A = O B; par conséquent les points A, B, sont également éloignés de la ligne D G; donc A B est parallèle à la base D G : ainsi (n°.280.)

OD.DG :: OA.AB : or OD = DG; donc OA = AB, c'est-à-dire, que la parallèle est précisément égale à la ligne qu'il s'agit de diviser.

Mais, à cause du parallélisme des lignes DG, AB, AM.DC :: OM.OC :: MT.CF :: OT.OF :: TB.FG. Donc AM.DC :: MT.CF :: TB.FG; C.Q.F.D.

Enfin, comme nous avons souvent parlé d'échelles, nous ne devons pas supprimer la manière d'en construire qui représentent des toises, des pieds, des pouces, des lignes, &c. Dans l'Arpentage on néglige les lignes, & même quelquefois les pouces.

PROBLÈME.

340. Construire une échelle qui représente des toises, des pieds, des pouces. (*fig.* 116.)

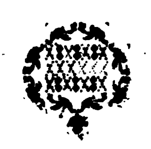
RÉSOLUTION.

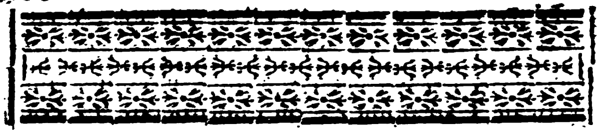
Supposons que l'on demande une échelle de 4 toises, où les pieds & les pouces soient marqués. Prenez une ligne AB que vous diviserez en cinq parties égales. Les quatre premières parties, en allant de gauche à droite, seront destinées à représenter chacune une toise, & l'on divisera la dernière partie en 6, pour avoir les 6 pieds compris dans une toise. Il faut présentement trouver les pouces, c'est-à-dire, les douzièmes parties de la petite ligne qui représente un pied. Afin d'y parvenir, au point B on élevera une perpendiculaire BD indéfinie, sur laquelle on prendra douze parties égales à liberté; après quoi on achevera le parallélogramme ABCD. Par les points de division on tirera des verticales & des horisontales. Enfin on ménera les diagonales 65, 54, 43, &c. & l'échelle sera achevée.

L'usage de cette échelle est assez simple. Voulez-vous prendre sur cette échelle 3 toises, 5 pieds, 7 pouces? mettez une des pointes du compas sur la verticale I au point *r*, où l'horisontale 77 coupe cette verticale. Ouvrez le compas jusqu'à ce que vous rencontriez sur cette horisontale la verticale 5 5; cela vous donnera 3 toises, 5 pieds: ouvrez encore le compas jusqu'à l'intersection *s* de cette même horisontale & de la diagonale 65; je dis que la longueur *r s* contient 3 toises, 5 pieds, 7 pouces de l'échelle.

DÉMONSTRATION.

Il est d'abord évident que *r s* contient 3 toises, 5 pieds, depuis *r* jusqu'en *t*: car il n'y a qu'à compter. Reste à prouver que la petite ligne *t s* vaut 7 pouces. Remarquez que les deux triangles 5 5 6, 5 *t s* sont semblables; donc 5 *t*. 5 5 :: *t s*. 5 6. Or 5 *t* contient $\frac{7}{12}$ parties de la ligne verticale 5 5; donc aussi *t s* contient $\frac{7}{12}$ parties de la ligne 5 6, qui vaut 12 pouces; c'est-à-dire, que *t s* = 7 pouces; par conséquent la ligne *r s* = 3 toises, 5 pieds, 7 pouces de l'échelle.





LIVRE IV.

OÙ L'ON TRAITE DE LA MESURE DES SOLIDES.

CHAPITRE PREMIER.

Génération des Solides. Évaluation de leurs surfaces

341. On appelle *Solide* en Géométrie tout corps évalué selon ses trois dimensions. Il y a plus de deux mille ans qu'Archimède, (un des plus profonds Géomètres qui ayent jamais éxisté) a découvert toute la doctrine des Solides. Ceux qui sont venus après lui n'ont eu à simplifier que quelques démonstrations. Le génie de cet homme extraordinaire n'avoit rien laissé à trouver là-dessus; il a même été au-delà de nos besoins.

Je vais exposer, le plus clairement qu'il me sera possible, la sublime Théorie, sur laquelle est fondée la mesure des Solides. Nous ne croyons pas qu'il y ait pour cela de méthode plus lumineuse que celle de les engendrer suivant certaines conditions. En voyant ce qui entre dans la composition d'un Solide, on est beaucoup plus en état d'en déduire les propriétés.

342. Réprésentez-vous que le plan A B C (*fig.*

117.) triangulaire coule parallèlement à lui-même le long de la ligne C D verticale. Si ce plan laissoit une trace de sa figure à chaque point où il arrive, il est évident qu'il en naîtroit le corps ou le solide A B C D G H, que l'on appelle en général *un Prisme*; mais le Prisme reçoit des noms différens selon la différence des plans générateurs. On l'appelle *Prisme triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonal*, &c. selon que la figure génératrice est un Triangle, un Quadrilatère, un Pentagone, &c.

On dit aussi qu'un Prisme est *droit*, quand la ligne D C, sur laquelle il a été engendré, est perpendiculaire au plan qui lui sert de base; mais on l'appelle *oblique*, lorsqu'il s'incline sur sa base.

Un Prisme est donc un corps qui a dans toute son étendue une grosseur égale, dont les bases supérieures & inférieures sont semblables, égales & parallèles : il est entouré de faces parallélogrammes, quand son plan générateur est une figure d'un nombre de côtés déterminé.

343. Si le plan générateur est un parallélogramme, le solide engendré est nommé *Parallélipipède* : telle est la figure O G P M S (*fig.* 118.) dont les faces opposées sont des parallélogrammes égaux, semblables & parallèles.

344. Le Parallélipipède prend le nom de *Cube*, lorsque sa base est un quarré, & que sa hauteur est égale au côté du quarré. On suppose toujours que le plan générateur s'élève perpendiculairement dessus sa base. *Voyez* la figure 119.

Les corps que nous venons de définir sont tous les jours devant nos yeux. Un dé à joüer est un cube. Un livre, une poutre, une règle ont à peu près la forme d'un Parallélipipède. Les carreaux héxagones, avec lesquels on carrèle les appartemens, sont de vrais Prismes.

Il faut pourtant convenir que, sans le secours de l'Art, la nature ne nous fournit guères de modèles bien éxacts de ces espèces de solides ; mais tel a été le génie des premiers Inventeurs ; ils ont imaginé des solides d'une mesure commode, afin d'y pouvoir rapporter ensuite les corps les moins uniformes dans leurs dimensions.

PROBLÊME.

345. Déterminer la surface du Cube, du Parallélipipède, du Prisme.

RÉSOLUTION.

1°. Par la génération du Cube (*fig.* 119.) ce Solide est terminé par six faces égales, qui sont des quarrés. Ainsi, après avoir mesuré l'une de ses faces, on en multipliera l'aire par 6, & ce dernier produit exprimera la surface totale du Cube.

2°. Remarquez aussi que le Parallélipipède a six faces, dont les opposées sont égales (*fig*, 118.) Cherchez donc la superficie des faces OGDT, TDMS, GPMD ; faites-en la somme, & multipliez-la par 2 : vous aurez la surface totale du Parallélipipède.

3°. Quant à la surface du Prisme (*fig.* 117.) on est sûr d'abord par la génération de ce Solide que la base supérieure ABC est égale à la base inférieure HGD. On prendra donc la mesure de l'une de ses bases que l'on doublera. Après cela on comptera les côtés du plan générateur ; le nombre de ces côtés indiquera celui des Parallélogrammes qui entourent le Prisme. Ces Parallélogrammes enveloppans seront tous égaux, si le Polygone générateur est régulier : ainsi la connoissance de l'un de ces Parallélogrammes les fera connoître tous ; mais il faudra prendre séparément la mesure de chacun d'eux,

en cas que la figure génératrice ait tous ses côtés inégaux. L'aire de tous les Parallélogrammes réunis, jointe à celle des deux bases, donnera la surface totale du Prisme.

Il ne faut qu'un coup d'œil pour concevoir tout ceci, quand on a des Solides réels devant les yeux. Il est donc à propos que l'on s'en fournisse. On verra même qu'ils sont absolument nécessaires à l'intelligence de certaines figures qu'il est presque impossible de représenter sur le papier.

346. Soit le Parallélogramme réctangle CBDF (*fig.* 120.) élevé verticalement sur un plan. Supposez que ce triangle tourne autour de son côté fixe F C qui lui sert de charnière. En faisant sa révolution, il engendrera un corps rond d'une égale grosseur dans toute son étendue, & dont les deux bases supérieure & inférieure seront deux cercles égaux, qui auront pour rayon le côté C B ou F D = C B. Cette espèce de Solide s'appelle un *Cilindre*. Une canne, une colonne, également grosses dans toute leur longueur, sont de vrais cilindres.

On nomme *axe* du cilindre la ligne F C, qui joint les centres F, C, des deux cercles qui peuvent servir de base au cilindre. Quand l'axe est perpendiculaire à la base, on dit que le cilindre est *droit*; mais qu'il est *scalène* ou *oblique*, si son axe est incliné sur la base; & alors la génération n'est pas la même. On peut le concevoir engendré par un cercle qui coule parallèlement à lui-même le long d'une ligne oblique au plan qui lui sert de base.

On voit par la génération du cilindre que ce Solide a une surface composée, pour ainsi dire, de trois pièces. Il est terminé par deux cercles égaux qui sont deux surfaces planes, & sa longueur est entourée d'une surface courbe, que nous appellerons sa *surface convèxe*.

PROBLÊME.

347. Trouver la surface d'un cilindre droit. (*fig.* 120.)

RÉSOLUTION.

1°. On trouvera, ainsi qu'il a été enseigné (n°. 202), la surface des deux bases circulaires.

2°. Multipliez la circonférence de l'une des bases circulaires par la hauteur D B du cilindre, vous aurez sa surface convèxe ; vous l'ajouterez à la surface des deux bases circulaires, ce qui produira la surface totale du cilindre.

DÉMONSTRATION.

Il s'agit uniquement de faire voir, que la surface convèxe d'un cilindre est égale au produit de la circonférence de l'une de ses bases par sa hauteur. Rappellez-vous que le cercle est un Polygone régulier d'un très-grand nombre de côtés si petits, qu'il est impossible de les discerner, mais donc l'éxistence est néanmoins très-réelle. On peut donc supposer que la surface convèxe du cilindre est divisée en un très-grand nombre de Parallélogrammes réctangles *a b d f* de même hauteur que le cilindre, & si étroits que leur convéxité ne diffère en rien d'une surface plane (*a*). Or on détermineroit la surface du petit

(*a*) Je prie les Lecteurs délicats de ne point perdre patience. Il y en aura, sans doute, quelques-uns qui s'ennuyeront de nous voir toujours supposer que la circonférence d'un cercle peut être considérée comme un Polygone réctiligne. Il ne nous est pas possible de les satisfaire encore. Quand nous aurons exposé les principes de la méthode d'*exhaustion*, dont nous ferons usage pour démontrer les Solides, nous sommes persuadés qu'il ne leur restera aucun scrupule à cet égard. J'aurois souhaité pouvoir me dispenser de certaines expressions un peu trop vagues, & qui ne paroissent point devoir être souffertes dans les sciences précises ; mais je n'ai pris cette liberté qu'afin de ne pas jetter d'abord les Commençans dans une trop grande contention : on reconnoîtra bien par la suite, que je les ai ménagés sans les flatter.

Parallélogramme rectangle *a b d f*, en multipliant la petite base *f d* par sa hauteur *b d* = B D, hauteur du cilindre; par conséquent, comme les petits réctangles *a b d f*, qui composeroient ensemble la surface convèxe du cilindre, auroient pour base totale l'une des circonférences des bases circulaires du cilindre, & pour hauteur commune celle du cilindre, il s'ensuit que l'on auroit la surface de tous ces petits Parallélogrammes, c'est-à-dire, la surface convèxe du cilindre, en multipliant la circonférence de l'une de ses bases par la hauteur du cilindre, ainsi qu'on l'a éxécuté.

348. La Résolution de ce Problême nous fait voir, que la surface convèxe d'un cilindre est égale à celle d'un Parallélogramme réctangle, dont l'un des côtés seroit égal à la circonférence de l'une des bases circulaires du cilindre, & l'autre côté égal à la hauteur du cilindre.

349. Si l'on faisoit couler le cercle A C B toujours parallèlement à lui-même le long de l'axe perpendiculaire F C (*fig.* 120.), ce mouvement produiroit encore un cilindre droit, comme ci-dessus (n°. 346.). Cette dernière génération du cilindre est fort propre à faire concevoir que ce Solide n'est pas différent du Prisme, dont le plan générateur est un Polygone régulier d'un très-grand nombre de côtés, qui réduisent par conséquent la surface convèxe du cilindre à une très-grande multitude de petits Parallélogrammes plans qui la composent (n°. 347.).

350. Si du sommet D d'une ligne élevée perpendiculairement au-dessus de la base A B C, (*fig.* 121.) on imagine une autre ligne D C inclinée, dont l'extrémité C parcoure le Périmètre C B A C, tandis que son autre extrémité est fixée au point D; le mouvement de cette ligne engen-

drera une surface piramidale, dont le Solide est appellé *piramide*.

Puisque toutes les faces de ce Solide vont se réunir en un point, il est évident que la surface de la piramide n'est composée que de faces triangulaires. On ne fait point ici mention de la base sur laquelle elle s'appuye.

Les différens polygones qui peuvent servir de base à la piramide lui donnent différens noms; elle est dite *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonale*, *héxagonale*, &c. selon que la base est un Triangle, un Quadrilatère, un Pentagone, un Héxagone, &c.

351. Mais quand la base est un cercle (*fig.* 122.), alors la piramide est appellée *cone*. La ligne D O menée du sommet D au centre O du cercle, est l'*axe* du cone. Si cet axe est perpendiculaire sur le plan du cercle, le cone *est droit*, autrement il est *scalène* ou *oblique*. La ligne génératrice D C, ou toute autre ligne droite menée du sommet D à un point quelconque de la circonférence de la base, s'appelle le *côté* du cone.

352. Coupez le cone par un plan S T parallèle à la base; enlevez-en la partie supérieure D S T: il restera la partie inférieure S M C T, que l'on appelle *cone tronqué*.

PROBLÊME.

353. Mesurer la surface d'une piramide (*fig.* 121.). Il ne s'agit point de la surface de la base.

RÉSOLUTION.

1°. Pour avoir la surface de la piramide DABC, on prendra la surface de tous les triangles qui entourent cette piramide.

On

On obſervera que la hauteur de ces triangles n'eſt pas la même que celle de la piramide, qui ſe meſure par une ligne qui tombe à plomb du ſommet D; aulieu que la hauteur des ſurfaces triangulaires eſt une ligne inclinée comme ces faces, & menée perpendiculairement ſur un côté du périmètre de la baſe.

2°. Si la piramide eſt droite, & que la baſe ſoit un Polygone régulier, toutes les faces triangulaires de cette piramide ſeront égales; elles ſeront de même hauteur & de même baſe: on en aura donc la ſurface totale, en multipliant le circuit ou le périmètre de la baſe de la piramide par la moitié de la perpendiculaire abbaiſſée du ſommet D ſur l'un des côtés du périmètre.

Remarquez que cette perpendiculaire n'eſt pas différente du côté D C de l'une des faces triangulaires, quand les côtés du Polygone régulier ſont très-petits; les faces triangulaires deviennent alors ſi étroites, que la perpendiculaire ſe confond avec les deux côtés du triangle iſoſcèle D B C.

PROBLÊME.

354. Trouver la ſurface du cone MDC (*fig.* 122.).

RÉSOLUTION.

Multipliez la circonférence de la baſe par la moitié du côté DC de ce cone. Ce produit vous donnera la ſurface du cone DMC.

DÉMONSTRATION.

Nous venons d'obſerver que la baſe de la piramide étant un Polygone régulier, on en avoit la ſurface totale, en multipliant le périmètre de ſa baſe par la moitié de la perpendiculaire, abbaiſſée

du sommet sur l'un des côtés du périmètre, & que cette perpendiculaire n'étoit pas différente du côté D C, quand les côtés du Polygone régulier étoient très-petits. Or c'est-là précisément le cas d'un cone D M C; puisque le cercle est un Polygone régulier d'un très-grand nombre de côtés, si petits que les faces triangulaires du cone deviennent insensibles, quoique réellement éxistantes, ainsi que l'indique le petit triangle D x y.

On auroit de même la surface du cone, en multipliant la moitié de la circonférence de sa base par son côté entier D C.

COROLLAIRE I.

355. Donc, si l'on construit un triangle réctangle $d\,c\,m$ (*fig.* 123.) dont la base $c\,m$ soit égale à la circonférence de la base circulaire du cone, & la hauteur $d\,c$ égale au côté du même cone, ce triangle réctangle sera égal à la surface convèxe du cone.

COROLLAIRE II.

356. Par conséquent en retranchant de la hauteur de ce triangle la partie d S, égale à la partie D T du côté du cone, si l'on tire S P parallèle à $c\,m$, cette parallèle S P sera égale à la circonférence de la base du petit cone supérieur D S T.

DÉMONSTRATION.

Considérez le cone D M C (*fig.* 122.). Vous devez vous rappeller que la coupe S T a été faite parallèlement à la base circulaire. Ainsi (n°. 279.) DT. TS :: DC. CM, ou DT. DC :: TS. CM. Les lignes TS, CM sont des diamètres; les diamètres sont entr'eux comme leurs circonfé-

rences (n°. 304.); par conséquent D T est à D C, comme la circonférence du diamètre T S est à la circonférence du diamètre C M.

Reprenant maintenant le triangle réctangle *d c m*, (*fig.* 123.), vous aurez *d* S. *d c* :: S P. *c m*. Or les deux premiers termes *d* S, *d c* de cette proportion, sont égaux (par la const.) aux deux premiers termes D T, D C de la précédente (*fig.* 122.); par conséquent la circonférence du diamètre T S est à la circonférence du diamètre C M :: S P. *c m*; ou en alternant, la circonférence du diamètre T S. S P :: la circonférence du diamètre C M. *c m*. Mais (supp.) la circonférence du diamètre C M = *c m*, base du triangle réctangle *d c m*; donc aussi la circonférence du diamètre T S = S P; C.Q.F.D.

COROLLAIRE III.

357. La surface convèxe du petit cone D T S (*fig.* 122.) est donc égale à la surface du petit triangle réctangle *d* S P. (*fig.* 123.) Par conséquent la surface S M C T du cone tronqué est égale à la surface du Trapèse P *m c* S, qui a pour hauteur le côté du cone tronqué T C = S *c*, & pour bases deux lignes parallèles *c m*, S P, égales aux deux circonférences des bases du cone tronqué, chacune à chacune : car on voit bien qu'en ôtant de grandeurs égales des quantités égales, les restes sont égaux.

PROBLÊME.

358. Trouver la surface d'un cone tronqué S M C T. (*fig.* 122.).

RÉSOLUTION.

Prenez la circonférence du cercle P L également

éloigné des deux bases circulaires du cone tronqué. Multipliez cette circonférence par le côté C T de ce cone ; le produit sera la surface du cone tronqué S M C T.

DÉMONSTRATION.

La surface du cone tronqué S M C T est égale à celle du Trapèse P *m c* S. Or la surface du Trapèse P *m c* S est égale à un réctangle de même hauteur, dont la base est moyenne proportionnelle Arithmétique entre les bases parallèles P S, *m c* (nº. 324.) ; & cette moyenne proportionnelle Arithmétique est la ligne H L également éloignée des deux bases, ainsi qu'on l'a fait remarquer au même endroit ; par conséquent la surface du cone tronqué = S *c* × H L. Mais (supp.) le côté T C du cone tronqué = S *c*. Donc la surface du cone tronqué = T C × H L. Or la ligne H L du Trapèse est égale à la circonférence P L qui est également éloignée des deux bases du cone tronqué, parce qu'il a été démontré (nº. 356.), que chaque ligne du triangle réctangle *d c m*, parallèle à sa base *m c*, étoit égale à une circonférence correspondante du cone. Ainsi la surface du cone tronqué = T C × P L, c'est-à-dire, que l'on détermine cette surface en multipliant le côté T C du cone tronqué par la circonférence P L également éloignée des deux bases circulaires du cone tronqué ; ce qu'il est important de remarquer. Nous allons nous servir de cette connoissance pour déterminer la surface de la Sphère.

Au reste la longueur de cette circonférence de cercle, également éloignée des deux bases circulaires du cone tronqué, est aisée à trouver. Car, puisqu'elle est moyenne proportionnelle Arithméti-

que entre les circonférences des bases circulaires ; la moitié de la somme de ces circonférences sera connoître la longueur cherchée (n°. 313.).

Generation de la Sphère.

359. Soit A B (*fig.* 124.) un diamètre fixe autour duquel le demi-cercle A C B fasse une circonvolution. Le plan de ce cercle engendrera un solide, rond ou circulaire en tous sens, auquel on a donné le nom de *Sphère*. Quelquefois on l'appelle un *Globe*. Une balle de paume, une boule ou une bille de billard sont des Sphères ou des Globes assez parfaits.

Tandis que le plan du demi-cercle engendre un solide, la demi-circonférence qui le termine, produit une *surface sphérique*. Et si l'on regarde la circonférence du cercle comme un Polygone d'un très-grand nombre de côtés fort petits, représentés par les petites tangentes S, S, S, &c. cette circonférence décrira une multitude de petites surfaces de cones tronqués, dont la totalité n'est pas différente de la surface entière de la Sphère ; en sorte que si l'on trouve un moyen d'évaluer les petites surfaces des cones tronqués, lesquels enveloppant la Sphère, se confondent avec sa surface, il est clair que la surface totale de la Sphère sera déterminée.

Avant de passer à l'évaluation de la superficie sphérique, il n'est pas hors de propos de faire connoître les noms que l'on donne à certaines parties de la Sphère.

La ligne A B, sur laquelle le demi-cercle a fait une révolution, est appellée l'*axe* de la Sphère ; les extrémités A, B, de l'axe en sont les *poles*. Toute ligne qui passe par le centre O de la Sphère & qui se termine à la surface, est un *diamètre*. L'axe A B est un des diamètres de la Sphère, C D en est un autre. Un *grand cercle* de la Sphère est celui dont

le plan passe par le centre; les cercles de la Sphère, dont les plans ne passent pas par le centre, sont de *petits cercles*. C O D est le diamètre d'un grand cercle. P M N l'est d'un petit. On appelle *zone* une bande de la surface sphérique comprise entre les circonférences de deux cercles parallèles. Un *segment* de Sphère est une pièce, ou un morceau de Sphère coupé par un plan qui ne passe pas par le centre. Si le plan coupant passoit par le centre, il couperoit la Sphère en deux portions égales, dont chacune est un *hémisphère*. En considérant la Sphère, comme l'assemblage de plusieurs cones qui ont leur sommet au centre & leur base à la surface de la Sphère, un de ces cones détaché, ou seulement indiqué dans la solidité de la Sphère, seroit un *secteur* de Sphère. Enfin on appelle *calotte sphérique* une portion quelconque de la surface de la Sphère.

PROBLÊME.

360. Déterminer la surface de la Sphère (*fig.* 125.).

RÉSOLUTION.

Prenons une des petites tangentes C D, dont la somme compose la demi-circonférence A F B (je donne une grande étendue à cette tangente, afin que les lignes, qui servent à la Démonstration, ne se confondent pas). Du point de contingence F abbaissons sur l'axe la perpendiculaire F P. La tangente C D étant prise pour un des petits côtés d'un Polygone régulier, les extrémités C, D de la tangente C D sont également distantes du point de contingence F, & par conséquent la perpendiculaire F P est également éloignée des perpendiculaires C H, D T, abbaissées des points C, D sur l'axe A B. De plus, les trois perpendiculaires C H, F P, D T sont parallèles.

Si l'on ſuppoſe, comme ci-deſſus, que le Trapèſe CDTH tourne autour de l'axe immobile AB, le plan de ce Trapèſe engendrera un cone droit tronqué; le côté CD produira la ſurface convèxe de ce cone; les perpendiculaires CH, FP, DT, engendreront des cercles parallèles, dont elles ſeront les rayons.

Afin d'abréger, pour indiquer la circonférence d'un rayon, par éxemple du rayon FP, je repréſenterai ce rayon au milieu d'une petite circonférence de cette ſorte (FP).

La Circonférence (FP) eſt donc également éloignée des deux circonférences (CH), (DT), des baſes circulaires du cone tronqué que nous venons d'engendrer. Or on a la ſurface d'un cone droit tronqué (n°. 358.) en multipliant le côté CD de ce cone par la circonférence (FP) également éloignée des deux baſes du cone tronqué. Donc CD × (FP) eſt l'expreſſion de cette ſurface.

Tirons maintenant la perpendiculaire CS = HT, hauteur du cone tronqué, & le rayon OF de la Sphère; nous aurons les deux triangles CSD, FPO équiangles. Car 1°. l'angle droit S de l'un eſt égal à l'angle droit P de l'autre. 2°. L'angle

C D S = l'angle F O P, puiſque C D S = C F G ; à cauſe du paralléliſme des lignes D T, F P (ſupp.). Or C F G formé par la tangente C F & par la corde F G, a pour meſure l'arc F A moitié de l'arc F A G (n°. 105.) ; & l'angle F O P au centre eſt auſſi meſuré par l'arc F A. Donc l'angle F O P = l'angle C F G, qui eſt égal à l'angle C D S ; d'où il ſuit que l'angle C D S = l'angle F O P. Donc (n°. 275.) les triangles C S D, F P O ſont équiangles ou ſemblables. Par conſéquent C D.

C S ou H T : : F O . F P : : $\textcircled{FO}$. $\textcircled{FP}$

(n°. 304.) : ainſi C D . H T : : $\textcircled{FO}$. $\textcircled{FP}$.

Donc C D × $\textcircled{FP}$ = H T × $\textcircled{FO}$. Mais

nous avons vû ci-deſſus que C D × $\textcircled{FP}$ étoit

l'expreſſion de la ſurface du cone tronqué engendré

par la petite tangente C D. Donc H T × $\textcircled{FO}$,

c'eſt-à-dire, la hauteur du cône tronqué multipliée par la circonférence d'un grand cercle de la Sphère, donne auſſi la valeur de la ſurface du petit cone tronqué.

Et comme la même démonſtration s'étend à toutes les ſurfaces des petits cones tronqués qui enveloppent la Sphère (*fig.* 24.), il eſt évident que la ſomme de toutes les hauteurs de ces petits cones

est exprimée par l'axe, ou le diamètre AB de la Sphère.

Par conséquent on a la surface totale de ces petits cones tronqués, c'est-à-dire, *la surface totale de la Sphère, en multipliant son diamètre par la circonference de l'un de ses grands cercles.* (*a*)

COROLLAIRE I.

361. Si l'on circonscrit un cilindre à la Sphère, c'est-à-dire, si l'on enferme une Sphère OMNS (*fig.* 126.) dans un cilindre ABCD, qui touche la Sphère par tout où il la peut toucher, la surface convèxe du cilindre circonscrit sera égale à celle de la Sphère.

Car le cilindre circonscrit étant aussi gros que la Sphère, ses bases supérieure & inférieure sont des grands cercles de la Sphère. Or (n°. 347.), on a la surface convèxe d'un cilindre droit comme est celui-ci, en multipliant la circonférence de l'une de ses bases par sa hauteur MS, c'est-à-dire, en multipliant la circonférence d'un grand cercle de la Sphère par son diamètre. Mais la surface de la Sphère se détermine avec ces mêmes lignes (n°. 360.); la surface de la Sphère est donc égale à la surface convèxe du cilindre qui lui est circonscrit.

COROLLAIRE II.

362. La surface de la Sphère est quadruple de la surface de l'un de ses grands cercles. Cela est

(*a*) Qui pourroit ne pas admirer le génie d'Archimède, Auteur de cette découverte ? Il en fut si satisfait lui-même, qu'il souhaita d'en laisser à la postérité un monument durable. Il demanda qu'on gravât sur son tombeau un cilindre circonscrit à une Sphère ; parce qu'il n'avoit pas seulement déterminé le rapport des surfaces de ces deux corps, mais encore celui de leurs solides, comme nous le verrons plus bas. L'inscription de ce tombeau le fit reconnoître à Cicéron dans le tems de sa Questure en Sicile.

évident : car on a la ſurface d'un des grands cercles de la Sphère, en multipliant ſa circonférence par la moitié du rayon, ou par le quart de ſon diamètre. Mais pour avoir la ſurface totale de la Sphère, on multiplie la circonférence d'un grand cercle par le diamètre entier. La ſurface de la Sphère eſt donc quadruple de l'un de ſes grands cercles.

COROLLAIRE III.

363. Il ſuit auſſi de la réſolution du Problême précédent, que la ſurface de la Zone *xyuz* (dont on n'a repréſenté ici qu'une partie) eſt égale à un réctangle, qui auroit pour baſe la circonférence d'un grand cercle de la Sphère, & une hauteur égale à la partie de l'axe *n* T, compriſe entre les deux cercles qui terminent la Zone.

Car la ſurface de cette Zone n'eſt pas différente de la ſomme des ſurfaces des petits cones tronqués qui occuperoient toute ſon étendue. Or on auroit la ſurface totale de ces petits cones tronqués, en multipliant la circonférence d'un grand cercle de la Sphère par la partie *n* T de l'axe qui exprimeroit leur hauteur totale (n°. 360.) ; on doit donc évaluer la Zone avec ces mêmes dimenſions.

Par la même raiſon, on trouve que la ſurface de la calotte ſphérique *x* M *z* ſe détermine, en multipliant la circonférence d'un grand cercle de la Sphère par la partie M *n* qui marque la hauteur de la calotte.

PROBLÊME.

364. Trouver le rapport de la ſurface totale du cilindre à celle de la Sphère inſcrite à ce cilindre. (*fig.* 126.)

RÉSOLUTION.

Nous avons vû (n°. 361.) que la ſurface de la

Sphère étoit égale à la surface convèxe d'un cilindre circonscrit, & (n°. 362.) que cette surface sphérique valoit quatre de ses grands cercles; mais outre sa surface convèxe, le cilindre circonscrit a encore deux bases, dont chacune est égale à un grand cercle de la Sphère; la surface totale du cilindre est donc égale à six grands cercles de la Sphère : ainsi la surface du cilindre circonscrit est à celle de la Sphère comme 6 est à 4. Or 6 . 4 : : 3 . 2; par conséquent la surface du cilindre circonscrit est à la surface de la Sphère, comme 3 est à 2; c'est-à-dire, que *la surface de la Sphère n'est que les* $\frac{2}{3}$ *de la surface totale du cilindre circonscrit.*

PROBLÊME.

365. Déterminer le rapport des surfaces des corps semblables.

RÉSOLUTION.

Les *corps semblables* sont ceux qui ont des bases, des faces & des inclinaisons semblables; les surfaces de ces corps sont donc composées de figures semblables, chacune à chacune. Or (n°. 306.) les figures semblables sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues. Par conséquent *les surfaces des corps semblables sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.*

COROLLAIRE.

366. Ainsi les surfaces des Sphères sont entr'elles comme les quarrés de leurs diamètres, ou comme les quarrés de leurs rayons : car les Sphères sont des Solides semblables, dont les diamètres ou les rayons sont des lignes homologues. Cependant, voici comment l'on peut détailler la Démonstration de ce Corollaire.

Soient S, *s*, le surfaces de deux Sphères que l'on va comparer; C, *c*, les circonferences de leurs grands cercles; D, *d* leurs diamètres.

Il a été démontré (n°. 360.) que la surface d'une Sphère étoit égale au produit de la circonférence d'un grand cercle par son diamètre; donc $S = CD$; & $s = cd$. Ainsi $S . s :: CD . cd$, ou $\frac{S}{s} = \frac{CD}{cd}$. Mais (n°. 305.), les circonférences des cercles sont entr'elles comme leurs diamètres; par conséquent $C . c :: D . d$, ou $\frac{C}{c} = \frac{D}{d}$; donc $\frac{CD}{cd} = \frac{DD}{dd}$. On peut donc mettre dans l'équation précédente $\frac{DD}{dd}$ à la place de $\frac{CD}{cd}$, & l'on aura $\frac{S}{s} = \frac{DD}{dd}$, ou $S . s :: DD . dd$; c'est-à-dire, que *les surfaces des Sphères sont entr'elles, comme les quarrés de leurs diamètres, ou comme les quarrés de leurs rayons*, parce que les diamètres sont entr'eux comme les rayons.

Ainsi une Sphère de 1 pied de rayon auroit 36 fois moins de surface qu'une Sphère de 6 pieds de rayon, puisque les surfaces de ces Sphères seroient entr'elles comme le quarré de 1 est au quarré de 6, ou comme 1 est à 36.



CHAPITRE II.

DE LA SOLIDITÉ DES CORPS.

Principes & vérités sur lesquels on en fonde l'Évaluation.

367. POur évaluer la solidité des corps, les Modernes ont imaginé des principes avec lesquels on résout avec une extrême facilité tous les Problêmes que l'on peut proposer sur cette matière. Il est vrai que les Anciens, & principalement Archimède, nous en ont laissé tout le fond. Mais la théorie en a paru si profonde à nos Modernes, ou peut-être même si difficile, qu'ils ont jugé plus commode de chercher un nouveau chemin, que de suivre celui qui étoit découvert.

Bonaventure Cavalieri, Milanois, Religieux de l'Ordre des Jésuates, publia en 1635 sa *Géométrie des Indivisibles*. Il y règne un principe qui a été adopté par le plus grand nombre des Géomètres qui sont venus après lui. Ce principe consiste à regarder les Solides comme un assemblage de petits plans élémentaires si minces, que leur épaisseur ne puisse plus diminuer; c'est ce qui les a fait appeller *Indivisibles*. On a déterminé le nombre de ces plans élémentaires par la perpendiculaire qui mesure la hauteur des Solides qui en sont composés; en sorte que, à bases égales, on a compté un plus grand nombre d'éléments à proportion que les hauteurs des Solides ont été plus grandes.

Quand, dans la comparaison de deux Solides, on a trouvé les éléments d'une part égaux aux élé-

ments de l'autre part, chacun à chacun, & de plus; un pareil nombre d'éléments de chaque côté, on a conclu que les Solides, auxquels appartenoient ces éléments, étoient égaux.

Figurez-vous donc que le petit plan élémentaire M de la piramide C M (*fig.* 127.) soit retréci continuellement par les côtés de la piramide, entre lesquels il monte perpendiculairement & parallèlement à lui-même, jusqu'à ce qu'il soit réduit à rien au point C; il paroît que ce petit plan M engendreroit un corps précisément égal & semblable à la piramide C M.

Si l'on imagine de même que le plan P élémentaire coule parallèlement à lui même le long de la ligne oblique L E, & qu'il soit diminué continuellement par les côtés de la piramide oblique E P de même hauteur que la piramide C M; on conçoit aussi qu'il engendreroit un corps égal à la piramide E P, dont le nombre des éléments seroit égal au nombre des éléments de la piramide C M. Nous allons considérer les Solides sous ce point de vûe de génération, nous réservant d'en apprétier la valeur, quand nous aurons fait connoître son application.

On doit se rappeller qu'un plan est une surface, dont aucunes des parties ne s'élèvent au-dessus des autres: elle est sans aucunes inégalités; ainsi l'on peut tracer des lignes droites sur un plan. On appelle *commune section* de deux plans M S, D P, (*fig.* 128.) l'étendue O L, dans laquelle ces plans s'entrecoupent.

PROPOSITION PREMIERE.

368. La commune section O L (*fig.* 128.) de deux plans quelconques M S, D P, est nécessairement une seule ligne droite.

DÉMONSTRATION.

Prenons les deux extrémités O, L de la commune ſection. Il eſt certain que du point O au point L, on peut mener une ligne droite ſur le plan M S; on en peut auſſi mener une entre les deux mêmes points ſur le plan P D, puiſque les deux points O, L, ſont dans l'un & l'autre plan. Or deux lignes droites qui ont les mêmes extrémités, ne ſont qu'une ſeule & même droite : ainſi la droite O L appartient à l'un & à l'autre plan; mais elle ne peut être commune que dans l'étendue où ces plans ſe rencontrent; la mutuelle rencontre, ou la commune ſection de deux plans eſt donc néceſſairement une ſeule ligne droite; C. Q. F. D.

Mais une ſeule ligne droite n'eſt pas néceſſairement la commune ſection de deux plans : c'eſt pourquoi la converſe eſt fauſſe.

Deux plans ſont appellés *parallèles*, quand toutes les perpendiculaires abbaiſſées de l'un ſur l'autre ſont égales.

PROPOSITION II.

369. **Deux plans parallèles, coupés par un troiſième plan, donnent des ſections parallèles rectilignes** (*fig.* 129.).

DÉMONSTRATION.

Soient les deux plans A B, C D, parallèles; coupés par un troiſième plan O T ou P G perpendiculaire ou oblique à ces deux plans; je dis que dans l'un & l'autre cas, les communes ſections O P; L T, ou O P, G F, ſont des lignes droites parallèles.

1°. Ce ſont des lignes droites (Prop. I. n°. 368.).

2°. Si le plan coupant O T eſt perpendiculaire,

on aura la perpendiculaire O L = la perpendiculaire P T; ainsi les deux sections O P, L T, étant deux lignes droites, dont tous les points de l'une sont à égale distance de tous les points de l'autre dans le même plan O T, il est nécessaire que ces deux lignes soient parallèles.

Mais si le plan coupant P G étoit oblique ou incliné aux deux plans A B, C D, cela n'empêcheroit pas que les sections O P, G F ne fussent parallèles. Car, imaginez que les sections O P, G F, soient des charnières sur lesquelles les plans A B, C D, puissent tourner, on pourra faire par ce moyen que les plans A B, C D, soient perpendiculaires au plan coupant P G, ou ce qui revient au même, que le plan coupant P G soit perpendiculaire aux deux plans A B, C D, sans que les communes sections O P, G F, ayent changé : or nous venons de voir que ces communes sections étoient parallèles, lorsqu'elles sont faites par un plan coupant perpendiculaire; donc, puisque le changement d'inclinaison du plan coupant ne fait point varier les sections, elles resteront encore parallèles, quelque inclinaison que le plan coupant puisse prendre. Par conséquent deux plans parallèles coupés par un troisième plan quelconque, donnent des sections parallèles réctilignes; C. Q. F. D.

Il n'est pas besoin d'avertir que la converse de cette proposition est fausse.

PROPOSITION III.

370. Si une piramide quelconque CM (*fig.* 127.) est coupée par un plan parallèle à sa base M, non-seulement il en naîtra une coupe *m* parallèle au plan M de la base; mais toutes les lignes, qui forment le contour de cette coupe, seront parallèles à toutes les lignes du périmètre de la base M, chacune à leur correspondante.

DÉMONSTRATION.

DÉMONSTRATION.

1°. La coupe *m* eſt parallèle, parceque le plan coupant eſt parallèle (ſupp.).

2°. Chaque côté *d f* eſt parallèle à ſon correſpondant D F. Car remarquez que les côtés *d f*, D F, ſont les communes ſections des deux plans *m*, M, parallèles, coupés par le troiſiéme plan C D F, qui eſt une des faces de la piramide : ainſi les communes ſections *d f*, D F, ſont parallèles (prop. 2. n°. 369.) Appliquez cette même démonſtration à tous les côtés correſpondans, & il eſt évident que tous les côtés du périmètre de la coupe *m*, parallèle à la baſe M, ſeront parallèles à tous les côtés du contour de la baſe M, chacun à ſon correſpondant ; C. Q. F. D.

On voit que la converſe de cette propoſition eſt vraie ; il ſuffit d'en avertir.

PROPOSITION IV.

371. La coupe *m* parallèle à la baſe M de la Piramide eſt un polygone ſemblable à cette baſe. (*fig.* 127.)

DÉMONSTRATION.

1°. Tous les côtés de la coupe *m* ſont proportionnels à tous les côtés de la baſe M, chacun à chacun. Car, puiſque (prop. 3. n°. 370.) *d f* eſt parallèle à D F, & *p d* parallèle à P D, &c. on aura D F . *d f* :: C D . *c d* :: D P . *d p* ; ainſi D F . *d f* :: D P . *d p*. En continuant à comparer de la même façon tous les côtés correſpondans, on verra que tous les côtés de la coupe *m* ſont proportionnels à tous les côtés de la baſe M, chacun à chacun.

on aura la perpendiculaire O L = la [...] e les angles
laire P T ; ainsi les deux sections C [...] à chacun ; par
deux lignes droites , dont tou[...] pD F. Imaginez
sont à égale distance de to[...] par les côtés C F,
dans le même plan O T [...] m, M , & donne les
deux lignes soient p[...] fP, parallèles ; & vous

Mais si le plan [...] p : : cp . C P : : pd . P D : :
cliné aux deux [...] DF ; donc fp . F P : : pd .
roit pas que l[...] & par conséquent , les trois cô-
rallèles. Car [...] dp étant proportionnels aux trois
soient des [...] le F D P , chacun à chacun , les an-
C D , r[...] P D F , opposés aux côtés homologues
moyer[...] sont égaux (par la converse du n°. 283.).
cula[...] même chose des autres angles correspon-
mê[...] & alors il paroîtra que la base M a non-
l[...] seulement tous ses côtés proportionnels aux côtés de la coupe *m* , chacun à chacun ; mais encore que les angles de l'une sont égaux aux angles de l'autre, chacun à chacun ; par conséquent ces deux plans sont des polygones semblables ; C. Q. F. D.

REMARQUE.

Nous avons déja averti que les figures différentes du triangle pouvoient être équiangles , sans avoir leurs côtés proportionnels , & réciproquement qu'elles pouvoient avoir leurs côtés proportionnels , sans être équiangles ; c'est pourquoi , afin que les figures qui ont plus de trois côtés soient semblables , il faut qu'elles soient en même tems équiangles , & que les côtés de l'une soient proportionnels aux côtés de l'autre , chacun à chacun : or il peut arriver que deux figures soient équiangles , quoiqu'elles n'ayent pas leurs côtés proportionnels.

Car , supposez que les côtés de l'héxagone régulier A B C D E F (*fig.* 168. *pl.* 20.) soient dou-

bles des côtés de l'héxagone régulier *abcdef*, il est clair que ces deux figures sont semblables, c'est-à dire, que tous les angles de l'une sont égaux à tous les angles de l'autre, chacun à chacun, & que les côtés de l'une sont proportionnels aux côtés de l'autre; mais si l'on prolonge les côtés C D, F E, & qu'en un point quelconque O de l'un des prolongemens l'on tire O M parallèle au côté D E, on voit que la figure A B C O M F est équiangle à la figure *abcdef*, & cependant elle ne lui est pas semblable. Ainsi des figures peuvent être équiangles, sans avoir leurs côtés proportionnels, chacun à chacun.

Réciproquement deux figures peuvent avoir tous leurs côtés proportionnels, sans être équiangles. Considérez les deux héxagones réguliers A B C D F G, *abcdfg* (*fig.* 169. *pl.* 20): ces figures sont équiangles; mais faites B R = B C, G T = G F, & des points R, T, avec le rayon B R ou G T, décrivez deux arcs qui se coupent au point S, afin d'avoir les côtés R S, T S, égaux au côté du grand héxagone; il est clair que les côtés de la nouvelle figure A B R S T G sont proportionnels aux côtés de la petite figure *abcdfg*, & que cependant les angles de l'une ne sont pas égaux aux angles de l'autre, chacun à chacun. C'est pourquoi, afin que l'on puisse démontrer que les figures sont semblables, il faut non-seulement que les côtés de l'une soient proportionnels aux côtés de l'autre, mais encore que les angles de l'une soient égaux aux angles de l'autre, chacun à chacun.

PROPOSITION V.

372. Les piramides CM, EP (*fig.* 127.) de même base & de même hauteur, sont égales en solidité; ou, ce qui est la même chose, deux pira-

mides, dont les bases M, P, sont égales, ont aussi une égale solidité, lorsqu'elles sont d'ailleurs situées entre les mêmes plans parallèles CE, DL.

DÉMONSTRATION.

Supposons donc que la base M de la piramide héxagonale CM soit égale en surface à la base P de la piramide quarrée EP de même hauteur : si l'on coupe l'une & l'autre piramide par un plan parallèle aux bases, cette coupe fera voir les deux petits plans élémentaires *m*, *p*, semblables à leur base correspondante (prop. 4. n°. 371.); & en imaginant que l'on fasse de semblables sections dans tout l'intervalle des parallèles CE, DL, on réduiroit l'une & l'autre piramide en un même nombre de petits plans élémentaires; ensorte que, si l'on démontre que chaque élément d'une piramide est égal à chaque élément correspondant de l'autre piramide, on aura démontré que toutes les parties qui composent une piramide sont égales à toutes les parties de l'autre, chacune à chacune, & qu'ainsi les deux piramides sont égales.

Il faut donc prouver que l'élément *m* est égal à l'élément *p* correspondant. Tirez CG, & à cause des parallèles CE, *dl*, DL, (supp.) rappellez-vous que (n°. 283.) $DF . df :: CD . cd :: CG . CO :: EG . Eg :: GL . gl$. Donc $DF . df :: GL . gl$; ainsi (n°. 254.) $\overline{DF}^2 . \overline{df}^2 :: \overline{GL}^2 . \overline{gl}^2$. Mais (prop. 4. n°. 371.) le plan M est semblable au plan *m*, & le plan P semblable au plan *p*. Ainsi, puisque les figures semblables sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues (n°. 306.) $M . m :: \overline{DF}^2 . \overline{df}^2$, & $P . p :: \overline{GL}^2 . \overline{gl}^2$. Les deux derniers rapports de ces proportions sont égaux;

les deux premiers le sont donc aussi ; par conséquent $M . m :: P . p$; ou, en alternant, $M . P :: m . p$. Mais (par la supp.) $M = P$. Donc aussi $m = p$; c'est-à-dire, que l'élément de la piramide héxagonale est égal à l'élément correspondant de la piramide quarrée. C'est la même démonstration à l'égard des autres éléments. Ainsi la somme des éléments de la piramide héxagonale est égale à la somme des éléments de la piramide quarrée, & d'ailleurs le nombre de ces éléments est égal de part & d'autre. Par conséquent les piramides de même base & de même hauteur sont égales ; C. Q. F. D.

La converse de cette proposition est fausse.

C'est ainsi que Cavalieri applique son principe des indivisibles à la démonstration de vérités découvertes depuis plus de deux mille ans ; mais par une théorie plus difficile, de l'aveu de tous les Géomètres, & plus rigoureuse, selon quelques-uns.

Nous avons promis de nous expliquer sur cette opinion. On verra notre pensée, que nous renvoyons plus loin, afin que nos Lecteurs ayent le tems d'y réfléchir.

COROLLAIRE.

373. Les Cones étant des piramides régulières d'un très-grand nombre de petites faces insensibles, il s'ensuit que les Cones sont non-seulement égaux en solidité aux Cones, mais encore aux piramides de même hauteur & de base égale.

PROPOSITION VI.

374. On peut toujours diviser un prisme droit triangulaire en trois piramides triangulaires égales.

DÉMONSTRATION.

Soit le prisme droit triangulaire A B C D F G (*fig*, 130.) appuyé sur une de ses faces parallélogrammes A C D G : (on doit s'imaginer que les points B, F sont relevés, & pour concevoir facilement tout ce que l'on va dire, il est à propos d'avoir en main un prisme triangulaire coupé ainsi que nous allons l'expliquer.) Coupez la face A C D G par la diagonale C G, & les deux faces A B F G, C B F D, qui sont en talud, par les diagonales B G, B D, partant du même point B; & considérez d'abord les deux piramides B G F D, G A B C. En supposant que le sommet de la piramide B G F D soit en B, sa base sera le triangle G F D, & sa hauteur la ligne B F; parce que B F est perpendiculaire sur le plan du triangle G F D. De même, en prenant le point G pour le sommet de la piramide G A B C, sa base sera le triangle A B C, égal au triangle G F D (par la nature du prisme triangulaire), & sa hauteur sera la ligne G A = B F, à cause que A G est perpendiculaire sur le plan du triangle A B C. Les deux piramides B G F D, G A B C, ont donc des hauteurs & des bases égales; elles sont par conséquent égales en solidité (prop. 5. n°. 372.)

Il y a une troisième piramide qu'il n'est pas facile de démêler sur la figure. Afin de l'imaginer plus aisément, enlevons la piramide B G F D de la figure I. Ne considérons plus que la figure I I d'où cette piramide a disparu, & au lieu de prendre le point F G pour le sommet de la piramide G A B C, comme nous avons fait dans la première comparaison, prenons son sommet au point B, en la considérant appuyée sur la base G C A. Cela posé, tâchez de discerner une troisième piramide

CDGB, dont les faces rampantes vont se réunir au point B qui en est par conséquent le sommet, & dont la base est le triangle CDG égal au triangle GCA.

Les deux piramides GABC, CDGB, ayant même sommet B, & les bases GCA, CDG, égales & dans le même plan, parce que la diagonale GC divise le parallélograme ACDG en deux parties égales; c'est une nécessité (n°. 372.) que la piramide GABC ait la même solidité que la piramide CDGB; mais il a été prouvé que la piramide GABC a aussi la même solidité que la piramide BGFD; par conséquent les trois piramides BGFD, GABC, CDGB, qui composent la totalité du prisme, sont égales. On peut donc diviser un prisme triangulaire en trois piramides égales; C. Q. F. D.

Cette proposition n'a point de converse.

COROLLAIRE.

375. On voit bien que la même démonstration s'étend aux prismes triangulaires inclinés; par conséquent une piramide triangulaire, ou un cone, n'est que le tiers d'un prisme triangulaire de même base & de même hauteur.

PROPOSITION VII.

376. Les prismes triangulaires ABCFGD, *abcfgd*, (*fig.* 131.) dont les bases ABC, *abc*, sont égales, & qui ont même hauteur, ou qui sont posés entre les mêmes plans parallèles D*f*, A*e*, ont aussi une solidité égale, soit que ces prismes soient tous deux droits, ou tous deux obliques, ou enfin que l'un soit droit & l'autre incliné.

DÉMONSTRATION.

Tirez les lignes GA, GC, d'une part, & de

l'autre les lignes *g a*, *g c*; afin d'avoir les deux piramides G A B C, *g a b c*, de même base & de même hauteur. (Il faut se représenter les points G, g relevés).

Par la proposition 6 (n°. 374.) tout prisme triangulaire peut être divisé en trois piramides égales. Ainsi le prisme A B C F G D contient trois piramides égales, dont G A B C en est une. De même le prisme *a b c f g d* est composé de trois piramides égales, entre lesquelles on voit la piramide *g a b c*. Or la piramide G A B C est égale en solidité à la piramide *g a b c* de même base & de même hauteur (n°. 372.). Donc les trois piramides du prisme triangulaire A B C F G D sont égales aux trois piramides, dont est composé le prisme triangulaire *a b c f g d*; par conséquent ces deux prismes sont égaux en solidité; C. Q. F. D.

La converse de cette proposition est fausse.

PROPOSITION VIII.

377. Un parallélipipède A B C D F G H M est toujours égal à un autre parallélipipède *a b c d f g h m* de même base & de même hauteur (*fig.* 132.).

DÉMONSTRATION.

Coupez le premier parallélipipède par le plan diagonal B D M G : il est évident que ce parallélipipède sera divisé en deux prismes triangulaires A B D F G M, B D C G M H égaux, puisqu'ils ont même hauteur & des bases égales (prop. 7.). Par la même raison, le plan diagonal *b d m g* divisera le second parallélipipède en deux prismes triangulaires *a b d f g m*, *b d c g m h* égaux, Mais, on a supposé dans la Proposition que la base F G H M du premier étoit égale à la base *f g h m* du second;

par conséquent les moitiés de la première base, c'est-à-dire, les triangles F G M, M G H, sont égaux aux moitiés de la seconde base, ou aux triangles *f g m*, *m g h*, chacun à chacun. Or, ces triangles sont les bases des prismes triangulaires de part & d'autre; par conséquent (Prop. 7.) les deux prismes triangulaires du premier parallélipipède sont égaux aux deux prismes triangulaires qui composent le second. Il faut donc conclure que les parallélipipèdes droits ou inclinés de même base & de même hauteur sont égaux en solidité; C. Q. F. D.

PROPOSITION IX.

378. Un prisme polygone quelconque droit, ou oblique, c'est-à-dire, un prisme dont la base est un polygone quelconque, est égal en solidité à tout autre prisme polygone de même base & de même hauteur.

DÉMONSTRATION.

Car toute base polygone peut être changée en base parallélogramme de même surface (n°. 322.) ce qui transforme les prismes polygones en parallélipipèdes de même base & de même hauteur. Or, ces parallélipipèdes sont égaux en solidité (n°. 377.). Donc aussi les prismes polygones quelconques de même base & de même hauteur sont égaux.

COROLLAIRE, I.

379. Les cilindres sont des prismes polygones. Ainsi les cilindres de même base & de même hauteur sont égaux en solidité.

COROLLAIRE II.

380. Un prisme polygone quelconque est tou-

jours le triple d'une piramide polygone quelconque de même base & de même hauteur.

Car, de même que l'on peut transformer tout prisme polygone en un parallélipipède de même base & de même hauteur (nº. 378.), on le peut aussi transformer en un prisme triangulaire de même base & de même hauteur. Dites la même chose de la piramide polygone, qui peut devenir triangulaire sans changer de solidité; puisqu'il suffit pour cela de transformer en triangle la base polygone de ces solides, ce qui est toujours possible. Or, un prisme triangulaire est toujours le triple d'une piramide triangulaire de même base & de même hauteur (nº. 375.); par conséquent un prisme polygone quelconque est toujours le triple d'une piramide polygone quelconque de même base & de même hauteur.

COROLLAIRE III.

381. On sçait qu'un cilindre est un prisme polygone, & qu'un cone n'est pas différent d'une piramide polygone; il est donc évident qu'un cilindre a trois fois plus de solidité qu'un cone ou qu'une piramide de même base & de même hauteur; ou, ce qui revient au même, qu'un cone ou une piramide n'est que le tiers d'un cilindre ou d'un prisme de même base & de même hauteur.

382. La mesure effective des solides est entièrement fondée sur les Propositions & les Corollaires précédens. Mais pour mesurer, il faut nécessairement convenir d'une certaine quantité, qui soit un modèle d'évaluation, ou une mesure à laquelle on rapporte toutes les autres mesures.

Dans les Livres précédens les lignes ou les longueurs ont servi de mesures aux longueurs ou aux distances, les surfaces aux surfaces; il faut donc que

les solides soient mesurés par des solides. Les mesures invariables les plus simples sont les plus commodes. Le cube est un solide, dont toutes les dimensions sont égales, toutes les faces égales, tous les angles égaux & invariables. Ainsi le cube est le modèle d'évaluation le plus naturel de tous les solides.

Une *toise cube* est donc un solide qui a une toise en longueur, une toise en largeur, & une toise en profondeur ou en épaisseur. De même le *pied cube* est un solide, dont les trois dimensions valent chacune un pied. Entendez la même chose du *pouce cube*, de la *ligne cube*, du *point cube*.

PROBLEME.

383. Trouver la solidité d'un parallélipipède droit, haut de trois toises sur une base dont la longueur A B = 6 toises, & la largeur B C en vaut 4 (*fig.* 133.).

RÉSOLUTION.

Multipliez les trois dimensions de ce prisme les unes par les autres, c'est-à-dire, prenez d'abord l'aire de la base en multipliant 6 par 4 = 24. Multipliez ensuite ce produit 24 par 3; le produit 72 indiquera que le prisme proposé contient 72 toises cubes.

DÉMONSTRATION.

Il est d'abord évident que l'aire de la base = 24 toises quarrées. Coupez maintenant la hauteur B D de ce prisme par des plans horisontaux, qui le divisent en autant de parallélipipèdes, hauts d'une toise, qu'il y a de toises dans la hauteur. Vous aurez trois tranches, dont chacune contiendra 24 cubes égaux au cube *a b d c f g* qui représente une toise cube; & par conséquent on trouvera le nombre de tous les

cubes, qui composent le prisme proposé, en multipliant 24 par trois, ce qui produira 72 toises cubes, ainsi qu'on l'avoit d'abord indiqué; C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

384. Comme on peut transformer un prisme quelconque en un parallélipipède qui lui soit égal en solidité, on voit que l'on déterminera toujours la solidité d'un prisme quelconque, en faisant le produit de ses trois dimensions, longueur, largeur, épaisseur. Tout ce qu'il faut observer dans les prismes obliques, c'est que les trois dimensions soient toujours prises perpendiculairement; parce que les prismes obliques étant égaux à des prismes droits de même base & de même hauteur, & la solidité des prismes droits se déterminant par des perpendiculaires (n°. 383.), il faut bien que ce soient des perpendiculaires qui déterminent aussi les dimensions des prismes obliques.

COROLLAIRE II.

385. Un cube contient donc 216 pieds cubes: car les trois dimensions perpendiculaires de la toise cube contiennent chacune six pieds; & par conséquent (n°. 383.) on aura pour sa valeur en pieds cubes $6 \times 6 \times 6 = 216$ pieds cubes.

Suivant le même principe, le pied cube contenant 12 pouces en long, 12 pouces en large, & 12 pouces en hauteur, contiendra en solidité $12 \times 12 \times 12 = 1728$ pouces cubes.

De même le pouce cube = 1728 lignes cubes; enfin la ligne cube = 1728 points cubes.

Il est nécessaire de sçavoir par cœur ces mesures cubiques; c'est pourquoi j'en donne une Table, afin qu'on y ait recours au besoin.

386. *TABLE DES MESURES cubiques les plus usitées.*

La toise cube contient	216 pieds cubes, ou 373248 pouces cubes.
Le pied cube contient	1728 pouces cubes, ou 2985984 lignes cubes.
Le pouce cube contient	1728 lignes cubes, ou 2985984 points cubes.
La ligne cube contient	1728 points cubes.

On fait usage dans l'Arpentage de la perche quarrée & de l'arpent qui vaut 100 perches quarrées, dont chacune = 9 toises quarrées, mesure de Paris; mais pour toiser les solidités, on ne se sert point d'arpens cubes, ni de perches cubes. Le toisé des ouvrages ordinaires ne demande point des mesures aussi énormes.

PROBLÊME.

387. Déterminer la solidité d'une piramide ou d'un cone quelconque.

RÉSOLUTION.

Évaluez d'abord sa base en mesures quarrées; multipliez cette valeur par la hauteur de la piramide, & prenez le tiers de ce produit; il vous donnera la solidité de la piramide ou du cone proposé.

DÉMONSTRATION.

On a la solidité d'un prisme quelconque, en prenant le produit entier de ses trois dimensions (n°. 384.), ou ce qui est la même chose, en multipliant sa base par sa hauteur. Mais une piramide

ou un cone est toujours le tiers d'un prisme de même base & de même hauteur (n°. 375.); par conséquent on ne prendra pour la solidité d'une piramide ou d'un cone, que le tiers du produit de sa base par sa hauteur. Soit, par exemple, une piramide droite triangulaire, élevée de 40 toises au dessus de sa base, dont la longueur = 10 toises, & la largeur en contient 6. Vous en déterminerez la solidité, en multipliant 6 par 10 = 60 valeur de la base, que vous multiplierez ensuite par 40, & vous aurez 60 × 40 = 2400, dont le tiers = 800 sera la valeur en toises cubes de la piramide proposée.

Que la piramide soit droite ou oblique, cela n'y fait rien, parce qu'il a été démontré (n°. 372) qu'une piramide oblique étoit toujours égale en solidité à une autre piramide droite de même base & de même hauteur.

PROBLÊME.

388. Trouver la solidité du cone droit tronqué ABCD, dont on connoît les circonférences ou les diamètres AB, CD des bases, & le côté AC ou DB. (*fig.* 134.)

RÉSOLUTION.

Continuez les deux côtés AC, BD, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent au point S, afin d'avoir le cone parfait SAB.

On auroit évidemment la solidité du cone tronqué ABCD, en ôtant le petit cône SCD du grand cone SAB; ainsi le problême se réduit à connoître la solidité des deux cones. Mais je remarque que tout seroit connu, si l'on déterminoit CS; parce que les hauteurs SG, Sg des deux cones, appartiennent aux triangles rectangles SGA,

S g C, dans chacun desquels on connoîtroit alors une hypothénuse & un côté, d'où l'on déduiroit facilement le troisième côté (n°. 295.) qui exprime ici la hauteur des cones.

Tâchons donc de connoître C S par les données du problême, & tout sera résolu. Considérons les triangles semblables S A B, S C D; nous aurons A B. C D :: A S. C S; donc (n°. 251.) A B − C D. C D :: A S − C S ou A C. C S. Or les trois premiers termes de cette dernière proportion sont donnés : car A B − C D est la différence des deux diamètres A B, C D donnés; par conséquent le quatrième terme C S de cette proportion est connu (n°. 247.).

Il n'en faut pat davantage pour déterminer la hauteur de l'un & l'autre cone, puisque, 1°. C S étant connu & A C donné, A S sera entièrement déterminé. Dans le triangle réctangle S A G on connoîtra donc l'hypothénuse A S, & le côté A G; ainsi la hauteur S G du grand cone est déterminée (n°. 295.).

2°. On connoît aussi, dans le petit triangle réctangle S C g, l'hypothénuse C S, & le côté C g, d'où l'on déduit la hauteur S g du petit cone.

Les bases & les hauteurs des deux cones étant déterminées, on en trouvera la solidité (n°. 387.), après quoi il ne s'agira plus que de retrancher la petite solidité de la plus grande, & ce qui restera donnera la solidité du cone tronqué; C. Q. F. T. & D.

AUTRE SOLUTION

Assez commode dans la pratique, pour trouver la solidité d'un cone ou d'une piramide tronquée, indépendamment de la hauteur S g du petit cone enlevé.

Vous trouverez que cette solidité est toujours égale à la somme des solidités de trois cones entiers, de même hauteur que le tronqué, & dont le premier auroit pour base le cercle inférieur, le second le cercle supérieur, & le troisième une base moyenne Géométrique entre le cercle supérieur & l'inférieur du cone tronqué, dont on recherche la mesure. (*fig.* 134.)

I. DÉMONSTRATION.

Soit $\frac{AB}{4} = R$, Circonf. $AB = C$, $\frac{CD}{4} = r$; circonf. $CD = c$, $Gg = h$. Alors la base du premier cone $= CR$; celle du second $= cr$; & pour avoir la base m du troisième, on fera $CR . m :: m . cr$; d'où l'on aura $m^2 = CrcR$: mais comme on a $C . c :: R . r$ (304), & par conséquent $Cr = cR$: il s'ensuit que $m^2 = C^2 r^2$, & que $m = Cr$; la base du troisième cone sera donc $= Cr$. Par conséquent la solidité du premier cone $= CR \times \frac{h}{3}$, (387.); celle du second $= cr \times \frac{h}{3}$, & celle du troisième $= Cr \times \frac{h}{3}$; de manière que ces trois solidités réunies $= \overline{CR + cr + Cr} \times \frac{h}{3}$. Il faut donc faire voir que la solidité du cone tronqué que l'on cherche $= \overline{CR + cr + Cr} \times \frac{h}{3}$.

II. Pour y parvenir, recherchons cette solidité suivant la manière précédente, où l'on a fait usage du petit cone supérieur, dont la hauteur Sg soit faite $= x$, & par conséquent la hauteur GS du cone entier $= h + x$, & l'on aura [à cause des triangles semblables AGS, CgS]

R.

$R . r :: h + x . x$; &, en soustrayant, $R - r . r :: h . x$; donc $x = \frac{hr}{R - r}$ sera l'expression de la hauteur du petit cone supérieur; & la hauteur G S sera $= h + \frac{hr}{R - r}$ [en donnant la même dénomination] $= \frac{hR - hr + hr}{R - r}$, laquelle devient $\frac{hR}{R - r}$. Ainsi, puisque la hauteur GS du grand cône $= \frac{hR}{R - r}$, & que celle du petit S $g = \frac{hr}{R - r}$, la solidité du grand sera (n°. 387.) $CR \times \frac{hR}{3R - 3r} = \frac{CR^2 h}{\overline{R - r} \times 3} = \frac{CR^2}{R - r} \times \frac{h}{3}$; & celle du petit $= cr \times \frac{hr}{3R - 3r} = \frac{cr^2 h}{\overline{R - r} \times 3} = \frac{cr^2}{R - r} \times \frac{h}{3}$; donc, en ôtant la petite solidité de la grande, celle du cône tronqué sera $= \frac{\overline{CR^2 - cr^2}}{R - r} \times \frac{h}{3}$. Or $C . c :: R . r$. (304). Donc $r = \frac{cR}{C}$. Ainsi $\frac{CR^2 - cr^2}{R - r} = \frac{CR^2 - cr^2}{R - \frac{cR}{C}}$ $= \frac{CR^2 - cr^2}{\frac{CR - cR}{C}} = \frac{C^2 R^2 - Ccr^2}{CR - cR}$. Donc la solidité du cône tronqué sera $= \frac{C^2 R^2 - Ccr^2}{CR - cR} \times \frac{h}{3}$. Or, si l'on divise $C^2 R^2 - Ccr^2$ par $CR - cR$, ou par $CR - Cr$ (à cause de $Cr = cR$), on aura le quotient éxact $CR + Cr +$ l'expression $\frac{Cr}{R}$, laquelle $= cr$; parce que $\frac{C}{R} = \frac{c}{r}$. La solidité du cône tronqué se trouve donc $= \overline{CR + Cr + cr} \times \frac{h}{3}$; comme on s'étoit proposé de le démontrer.

REMARQUE I.

Pour avoir la base moyenne proportionnelle Géométrique entre la supérieure & l'inférieure du cône tronqué, il semble qu'il suffiroit d'extraire la racine quarrée du produit de ces deux bases. Mais, comme les racines quarrées sont rarement éxactes, & que pour une plus grande précision il faut se jetter alors dans l'approximation des racines, qui éxige un calcul assez laborieux, on aura plus commodément cette base moyenne, en multipliant la circonférence C de la grande base par r, moitié du rayon de la petite circonférence supérieure du cône tronqué. Car on a vû (art. 1. de la Démonst.) que cette base moyenne appellée $m = Cr$; ce qui fait éviter l'extraction des racines, ainsi que leur approximation.

REMARQUE II.

Si l'on étoit curieux de trouver un cercle égal à cette base moyenne, il n'y auroit qu'à nommer ce cercle $= m$, & la moitié de son rayon $= x$: on auroit alors (306.) $m . CR :: x^2 . R^2$. Or (art. 1. de la Dém.) $m = Cr$; donc $Cr . CR :: x^2 . R^2$; ainsi $CR^2 r = CR x^2$, & $x^2 = \frac{CR^2 r}{CR} = Rr$; par conséquent $R . x :: x . r$; ce qui démontre qu'une moyenne proportionnelle Géométrique x, entre R, moitié du Rayon du grand cercle, & r moitié du rayon du petit cercle du cône tronqué, est le demi-rayon d'un cercle égal à la base moyenne cherchée. Car, décrivant un cercle y avec le double de ce demi-rayon, on trouveroit (306) $y . CR :: x^2 . R^2$: or $x^2 = Rr$ (const.); donc $y . CR :: Rr . R^2$;

& par conſéquent $y = \frac{CR^2 r}{R^2} = Cr =$ (art. 1. de la Dém.) la baſe moyenne m; C. Q. F. D.

PROBLÊME.

389. Déterminer la ſolidité de la Sphère. (*fig.* 135.)

RÉSOLUTION.

Multipliez la ſurface de la Sphère par le tiers de ſon rayon, ou par la ſixième partie de ſon diamètre; ce produit exprimera la ſolidité de la Sphère.

DÉMONSTRATION.

Concevez la ſurface de la Sphère diviſée en un très-grand nombre de petites portions égales quelconques, telles que *a o b*, qui ne diffèrent pas ſenſiblement d'une ſurface plane : de tous les points de cette petite ſurface, imaginez les rayons *a c*, *o c*, *b c*, &c. il en naîtra une petite piramide *a b o c*, dont la hauteur eſt le rayon de la Sphère ; & ſi l'on ſuppoſe que l'on ait réduit ainſi toute la ſolidité de la Sphère, il eſt évident qu'elle ſera compoſée d'un très-grand nombre de petites piramides, leſquelles ayant toutes même hauteur, auront, pour la ſomme de leurs baſes, la ſurface entière de la Sphère. Or on trouve la ſolidité d'une piramide, en multipliant ſa baſe par le tiers de ſa hauteur (nº. 387), & par conſéquent on déterminera la ſolidité de toutes les petites piramides qui compoſent la Sphère, en multipliant la ſomme de leurs baſes, ou la ſurface totale de la Sphère, par le tiers du rayon qui eſt leur hauteur commune; & comme le tiers du rayon eſt égal à la ſixième partie du diamètre, il eſt clair que la ſolidité de la Sphère eſt égale au produit de ſa ſurface par la ſixième partie de ſon diamètre.

COROLLAIRE I.

On voit par-là que la ſphère eſt égale à une piramide, ou à un cone, qui auroit pour baſe la ſurface de la Sphère, & pour hauteur ſon rayon.

Suppoſons, par éxemple, que le diamètre d'une Sphère = 4 pieds : on commencera par chercher (en ſe ſervant du rapport d'Archimède) la longueur de la circonférence de l'un de ſes grands cercles. On dira donc $7 . 22 :: 4 . \frac{4 \times 22}{7} = \frac{88}{7}$, valeur de la circonférence cherchée. Or (n°. 360.) cette circonférence multipliée par ſon diamètre donne la ſurface de la Sphère. Cette ſurface ſera donc $\frac{88}{7} \times 4 = \frac{352}{7} = 50 + \frac{2}{7}$. Enfin on multipliera $50\frac{2}{7}$ par la ſixième partie du diamètre, c'eſt-à-dire, par $\frac{4}{6}$ ou $\frac{2}{3}$: or $50\frac{2}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{100}{3} + \frac{4}{21} = 33\frac{1}{3} + \frac{4}{21} = 33 + \frac{11}{21}$. Ce qui ſignifie que la ſolidité d'une Sphère, qui a 4 pieds de diamètre, eſt de 33 pieds cubes, & $\frac{11}{21}$ de pied cube, à peu-près ; parce que le rapport d'Archimède n'eſt qu'un rapport approché.

COROLLAIRE II.

390. Il réſulte des trois Problêmes précédens, qu'en général les ſolides de même eſpèce ſont entr'eux comme le produit des dimenſions, qui concourent à déterminer leur ſolidité.

Car, ſoient deux priſmes quelconques P, *p* ; dont les hauteurs ſoient H, *h*, & les baſes BB, *bb*, (j'indique les baſes par les Quarrés BB, *bb* ; parce que les baſes des ſolides ſont des plans, dont on peut ſuppoſer la quadrature.) on aura (n°. 383.) P = BBH, & *p* = *bbh* ; donc P . *p* :: BBH . *bbh* ; & ſi, en la place des priſmes, on veut prendre des piramides ou des cones, on aura P

$= \frac{BBH}{3}$ & $p = \frac{bbh}{3}$ (n°. 383.) ; donc P . p :: $\frac{BBH}{3}$. $\frac{bbh}{3}$ :: BBH . bbh : car les tiers sont entr'eux comme leurs touts ; par conséquent les solides de même espèce sont entr'eux comme les produits des dimensions d'où résulte leur solidité.

COROLLAIRE III.

391. Mais, quand les solides sont des corps semblables, c'est-à-dire, quand les dimensions de l'un sont proportionnelles aux dimensions de l'autre, ces corps sont entr'eux comme les cubes de leurs côtés homologues. J'en vais faire la démonstration sur deux Sphères ; il sera aisé de l'appliquer aux autres solides.

Soit une Sphère = S, la circonférence de l'un de ses grands cercles = C, son diamètre = D : pareillement appellons s une autre Sphère, d son diamètre, c la circonférence de l'un de ses grands cercles.

Suivant le n°. 389. $S = \frac{CDD}{6}$ & $s = \frac{cdd}{6}$; donc S . s :: $\frac{CDD}{6}$. $\frac{cdd}{6}$ :: CDD . cdd ; donc S . s :: CDD . cdd ; ou $\frac{S}{s} = \frac{CDD}{cdd}$: mais (n°. 305.) les circonférences sont entr'elles comme leurs diamètres, c'est-à-dire, C . c :: D . d, ou $\frac{C}{c} = \frac{D}{d}$; par conséquent, dans l'équation $\frac{S}{s} = \frac{CDD}{cdd}$, au lieu de $\frac{C}{c}$, on peut mettre $\frac{D}{d}$; ce qui donnera $\frac{S}{s} = \frac{DDD}{ddd}$, ou S . s :: D^3 . d^3. Cela veut dire que *les Sphères sont entr'elles comme les cubes de leurs diamètres*.

En supposant deux sphères, dont l'une ait 1 pied de diamètre, & l'autre en ait 3, la solidité de la

première sera 27 fois plus petite que la solidité de la seconde : car la première sera à la seconde, comme le cube de 1 est au cube de 3, ou comme 1 est à 27.

COROLLAIRE IV.

392. Faites attention, en passant, à un principe dont on fait un très-grand usage en Physique ; c'est qu'un gros solide a moins de surface, à proportion, qu'un petit solide de même matière.

Prenons l'éxemple précédent. Une Sphère de trois pieds de diamètre a 27 fois plus de solidité qu'une autre sphère d'un pied de diamètre : ainsi, en proportionnant la surface de ces sphères à leur solidité, la grosse devroit avoir 27 fois plus de surface que la petite ; elle n'en a pourtant que 9 fois plus : car vous pouvez vous rappeller que les surfaces des corps semblables, c'est-à-dire ici, les surfaces des sphères sont entr'elles, comme les quarrés de leurs diamètres (no. 366.), ou comme le quarré de 1 est au quarré de 3. Les surfaces des sphères proposées sont par conséquent entr'elles comme 1 est à 9 : la surface de la grosse sphère est donc simplement 9 fois plus grande que celle de la petite ; par conséquent les surfaces des corps ne sont pas proportionnées à leurs solidités.

PROBLÊME.

393. Trouver le rapport de la solidité de la sphère à celle du cilindre circonscrit.

RÉSOLUTION.

Vous sçavez que la base du cilindre circonscrit à la Sphère, est un grand cercle de la Sphère, & que la hauteur de ce même cilindre est le diamètre de

la Sphère (n°. 361.). Appellons L le cilindre, S la Sphère, C la circonférence de l'un de ses grands cercles, D son diamètre.

On a la solidité d'un cilindre ou d'un prisme polygone, en multipliant sa base par sa hauteur. La base du cilindre proposé est un cercle, dont l'aire est égale au produit de la circonférence par la moitié du rayon, ou par le quart du diamètre; ainsi cette aire est $\frac{CD}{4}$, laquelle multipliée par la hauteur D, produit $\frac{CDD}{4}$ pour la solidité du cilindre L circonscrit: mais (n°. 389.) la solidité de la Sphère S est $\frac{CDD}{6}$; donc L. S :: $\frac{CDD}{4}$. $\frac{CDD}{6}$ :: 6 CDD. 4 CDD :: 6. 4 :: 3. 2. Ainsi L. S :: 3. 2, ou S. L :: 2. 3. c'est-à-dire, que *la solidité de la Sphère est à celle du cilindre circonscrit comme 2 est à 3.*

COROLLAIRE.

394. Nous avons vû (n°. 364.) que la surface de la Sphère étoit aussi à celle du cilindre circonscrit comme 2 est à 3. La solidité de la Sphère est donc à la solidité du cilindre circonscrit, comme la surface de la Sphère est à celle du même cilindre.

PROBLÊME.

395. Transformer une piramide, un cone ou une Sphère, en un parallélipipède qui lui soit égal en solidité.

RÉSOLUTION.

1°. On changera la base de la piramide ou du cone en un réctangle de même surface que cette base. Sur cette base ainsi transformée, on fera un parallélipipède, auquel on donnera pour hauteur le tiers

de la hauteur de la piramide ou du cone proposé ; il en résultera évidemment le parallélipipède demandé (nº. 387.).

2º. Quant à la Sphère, on transformera sa surface en réctangle, c'est-à-dire, que l'on fera un réctangle avec son diamètre, & la circonférence de l'un de ses grands cercles (nº. 362.). On construira sur ce réctangle un parallélipipède, dont la hauteur soit égale au tiers du rayon de la Sphère, ou à la sixième partie de son diamètre ; & ce parallélipipède aura la même solidité que la Sphère proposée.

Je ne m'arrête pas à démontrer ces constructions, dont la seule indication est plus que suffisante pour les faire concevoir.

PROBLÊME.

396. Transformer un cilindre, ou un prisme polygone quelconque, en un parallépipède de même solidité.

RÉSOLUTION.

Changez, comme ci-dessus, la base du cilindre, ou prisme proposé, en un réctangle de même surface. Sur cette base réctangulaire construisez un parallépipède, dont la hauteur soit égale à celle du prisme ou du cilindre proposé ; il en résultera un parallélipipède tel qu'on le demande.

PROBLÊME.

397. Faire un cube égal à un parallélipipède donné.

RÉSOLUTION.

Appellons P le parallélipipède donné ; nommons aussi a, b, c les trois dimensions d'où résulte sa solidité : on aura $P = abc$ (nº. 383.).

Ainsi, 1°. Si les trois dimensions a, b, c, sont données ennombres, tirez la racine cubique x du produit abc de ces trois dimensions; le cube fait avec cette racine cubique x, sera égal en solidité au parallélipipède P: car, puisque l'on suppose x égal à la racine cubique de abc; donc le cube de x doit redonner abc.

Il arrive fort souvent que la racine cubique n'est pas éxacte; en ce cas il faut avoir recours à l'approximation des racines (n°. 84. Arith.).

2°. Quand les trois dimensions du parallépipède P ne sont données qu'en lignes, en nommant x le côté du cube cherché, on aura $abc = x^3$. Cherchons d'abord (n°. 309.) une moyenne proportionnelle Géométrique f entre deux dimensions quelconques a, b du parallélipipède P, pour avoir $a . f :: f . b$. Donc, $ab = ff$; ainsi $abc = ffc$; & par conséquent $x^3 = ffc$. Donc $fx^3 = f^3 c$, d'où l'on tire $f^3 . x^3 :: f . c$.

Mais il est aisé de remarquer que cette dernière proportion peut être déduite d'une progression continue qui contiendroit deux moyennes proportionnelles x, y, entre f & c. Car, si l'on fait $\div f . x . y . c$, ou $f . x :: x . y :: y . c$, on en déduira $f^3 . x^3 :: f . c$. (n°. 257.), c'est-à-dire, que le cube de la moyenne proportionnelle f est au cube cherché, comme cette moyenne proportionnelle est à la troisième dimension c du parallélipipède.

Le Problême se réduit donc à trouver deux moyennes proportionnelles Géométriques entre deux lignes données f, c, & le cube fait sur la première de ces moyennes proportionnelles sera le cube que l'on demande.

Mais on ne sçauroit trouver avec le seul secours de la ligne droite & du cercle deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données; ce Pro-

blême ne peut être résolu que par la Géométrie des courbes différentes du cercle.

398. La *duplication du cube*, que l'Oracle de Délos rendit autrefois si célèbre, revient à ce Problême. En lisant la Note (*a*), on verra à quelle occasion il fut proposé de trouver un cube double d'un autre. Les anciens Géomètres employèrent toute leur sagacité au dénouement de cette question; elle étoit au-dessus de la Géométrie élémen-

(*a*) Le Problême de la *duplication du cube* n'est gueres moins fameux que celui de la *quadrature du cercle*.

La peste désoloit Athènes, & l'on n'y trouvoit point de remède. On a éprouvé plus d'une fois que l'opinion étoit un excellent spécifique. Le Médecin qui s'est emparé une fois de l'esprit de son malade, est très-avancé dans sa cure. Voila pourquoi je penserois qu'une des grandes parties de la Médecine est l'éloquence.

Les malheureux Athéniens pénétrés de bonne foi, dont ils avoient toujours de forts redoublemens dans les grandes calamités, eurent recours à l'Oracle de Délos. Apollon y faisoit des merveilles : c'étoit une des plus grandes dévotions de la Grèce. L'Autel du Temple avoit précisément une figure cubique.

Apparemment l'Oracle étoit Géomètre, ou plutôt quelque Géomètre faisoit l'Oracle : car, après avoir entendu les Envoyés d'Athènes, il leur répondit que la peste cesseroit, s'ils pouvoient seulement lui élever un Autel cubique double du sien.

Je ne sçais pas si les Athéniens en comprirent d'abord la difficulté; mais ils dûrent s'appercevoir, quand ils y eurent un peu pensé, que la plaisanterie de l'Oracle étoit fort déplacée; parce que la Résolution du Problême étoit impossible géométriquement, c'est-à-dire, selon les Anciens, en n'employant que la ligne droite & le cercle.

Je me persuade que l'Oracle Géomètre avoit usé toute sa Géométrie à cette question, & qu'il ne l'avoit proposée que pour se réjouir aux dépens des pauvres Athéniens. En ce tems-là, c'étoit assez la coutume des Dieux de se moquer des humains qui avoient besoin de leur protection, parce que très-souvent les humains se moquoient des Dieux, dont ils n'avoient pas besoin.

Cette Note sera peut-être regardée comme un écart un peu violent; mais j'ai déclaré plus d'une fois que je m'expliquerois volontiers sur la nature de l'esprit humain, quand l'occasion s'en présenteroit. Combien de fois l'ai-je accusée d'être trop lente à se montrer? „ Si l'on trouve cette conduite peu exacte, dit M. le „ Chevalier Follard, & contraire aux règles de la discipline des „ Auteurs réguliers, je ne sçais qu'y faire. Les digressions plaisent „ & délassent; tout le monde le dit. Je consens que d'autres, qui „ ne sont pas de l'avis de tout le monde, désapprouvent cette es„ pèce de libertinage : ils ne feront pas pancher la balance. Je dois „ m'accommoder à toutes sortes d'esprits, & éviter sur toutes cho„ ses la sécheresse, dont les matieres que je traite ne sont que „ trop susceptibles. „

taire, comme le Problême ci-dessus, dont elle n'est pas différente.

Car soit le cube a^3, dont on demande un cube double. Si vous appellez x le côté du cube cherché par la condition du Problême, vous aurez $x^3 = 2a^3$, ou $x^3 \times 1 = a^3 \times 2$. Ainsi $a^3 . x^3 :: 1 . 2$ (n°. 246.) $:: a . 2a$ (n°. 252.). Donc $a^3 . x^3 :: a . 2a$.

Cette dernière proportion fait voir qu'en faisant un cube sur la première de deux moyennes proportionnelles entre le côté a du cube donné & son double $2a$, ce cube sera celui que l'on cherche. En effet, supposons les deux moyennes proportionnelles x, y, entre a & $2a$, c'est-à-dire, supposons la progression continue $a . x :: x . y :: y . 2a$, on aura (n°. 257.) $a^3 . x^3 :: a . 2a$, ou $2a . a :: x^3 . a^3$; & comme $2a$ est le double de a, ainsi le cube x^3 est double du cube a^3.

Le Problême de la *duplication du cube* se réduit donc à trouver deux moyennes proportionnelles entre le côté du cube donné & le double de ce côté. Après avoir reconnu que la Géométrie ordinaire ne suffisoit pas à la résolution de ce Problême, les anciens Géomètres le prirent à cœur. A l'invitation de Platon, les plus illustres Mathématiciens de toute la Grèce y travaillérent. Plusieurs trouvérent des courbes fort ingénieuses, qui en donnoient la résolution ; d'autres imaginérent des instruments qui produisoient le même effet. Platon s'y distingua : son instrument est d'une invention très-élégante ; on ne me sçaura pas mauvais gré de le faire connoître.

PROBLÊME

Trouver *organiquement* (*a*) deux moyennes pro-

(*a*) *Organiquement*, c'est-à-dire, avec un instrument.

portionnelles entre deux lignes données A B, B C.

Résolution organique de Platon.

399. Sur l'une des branches R G de l'équerre M R G (*fig.* 136.) disposez perpendiculairement la règle mobile P S; ensorte qu'elle puisse couler, suivant le besoin, le long de la branche R G, en conservant sa perpendicularité. Vous avez l'instrument de Platon.

Pour trouver avec cet instrument deux moyennes proportionnelles entre les deux lignes données A B, B C; après avoir mis ces deux lignes à angles droits au point B, prolongez A B indéfiniment vers P, & B C aussi indéfiniment vers R. Cette préparation faite, mettez l'angle de l'instrument en un point R, tel que sa branche R M passant par l'extrémité A de la ligne A B, son autre branche R G coupe le prolongement B P en un point P, où la règle mobile P S amenée passe par l'extrémité C de la seconde ligne B C (ce que quelques tentatives feront découvrir). Je dis que les deux lignes B R, B P, sont les deux moyennes proportionnelles cherchées, c'est-à-dire, que A B . B R :: B R . B P :: P B . B C.

DÉMONSTRATION.

Le triangle A R P est réctangle en R, & (const.) la ligne R B est perpendiculaire sur l'hypothénuse A P : or (n°. 291.) si de l'angle droit d'un triangle réctangle on abbaisse une perpendiculaire sur l'hypothénuse, cette perpendiculaire est moyenne proportionnelle entre les parties de l'hypothénuse. Donc A B . B R :: B R, B P, & par la même raison, le triangle R P C étant réctangle en P, B R . B P :: B P . B C. Ainsi B R & B P sont moyen-

nes proportionnelles entre les deux lignes données AB, BC; C. Q. F. D.

Il faut convenir que cette Résolution organique est très-élégante; mais aussi est-elle un peu tâtonneuse.

M. Descartes, qui sera à perpétuité la brillante époque du plus grand essor que les Sciences ayent jamais pris, a bien renchéri sur tous les Anciens qui ont travaillé à la duplication du cube. Sans parler de sa Géométrie où ce Problême se trouve résolu comme par accident, ce génie, unique de son tems, & encore supérieur aujourd'hui, a inventé un instrument qui donne, sans aucun tâtonnement, non-seulement deux moyennes proportionnelles, mais encore tel nombre que l'on en veut.

PROBLÊME.

400. Trouver organiquement entre deux lignes données tant de moyennes proportionnelles que l'on voudra.

Résolution organique de M. Descartes.

Son instrument ABC (*fig.* 137.) est une espèce de compas, composé de deux règles AB, BC, mobiles autour de la charnière B. Sur ces règles sont disposées plusieurs équerres, suivant le nombre des moyennes proportionnelles que l'on cherche: il faut trois équerres pour deux moyennes, quatre pour trois, cinq pour quatre, & ainsi de suite. Chacune de ces équerres touche l'angle de sa voisine, comme on le voit aux points *f*, *g*, *h*, *m*, *o*. Les branches *dp*, *fs*, *gt*, *hx*, *my*, *ou*, &c. peuvent glisser sur les règles AB, BC; par conséquent les autres branches *df*, *fg*, &c. étant forcées de se mouvoir, si l'on arrête la première équerre

fdp au point *d* ſur la règle B C, en ouvrant l'angle ou le compas A B C, l'équerre *p d f* fera gliſſer ſa voiſine *g f s* ſur la règle A B : l'équerre *g f s* chaſſée chaſſera l'équerre *h g t* ſur la règle B C, & ainſi de ſuite ; enſorte que par le même mouvement toutes ces équerres ſe pouſſent & ſe chaſſent en même-tems ; & lorſqu'on ferme le compas entièrement, c'eſt-à-dire, lorſque les deux règles, A B, B C ſe touchent, tous les points *o*, *m*, *h*, *g*, *f*, *d* viennent ſe réunir au point *a*.

Si vous avez bien conçû la conſtruction de cet inſtrument, il vous ſera facile de comprendre que l'on peut trouver par ſon moyen autant de moyennes proportionnelles que l'on en demandera.

Voulez-vous deux moyennes proportionnelles entre B D & B H ? Tranſportez la plus petite B D ſur la règle B C de B en *d*, & la plus grande B H ſur la règle A B de B en *h*. Mettez l'angle de la première équerre *f d p* au point *d* où vous l'arrêterez; ouvrant enſuite le compas A B C juſqu'à ce que la troiſième équerre *h g t* paſſe par l'extrémité *h* de la plus grande des deux lignes données, l'inſtrument vous montrera les deux lignes B*f*, B*g*, qui ſeront moyennes proportionnelles entre les lignes propoſées B *d*, B *h*, c'eſt-à-dire, que l'on aura B*d*. B*f* : : B*f*. B*g* : : B*g*. B *h*.

DÉMONSTRATION.

Remarquez que par la nature de l'inſtrument les deux triangles B*fg*, B*gh* ſont tous deux réctangles, le premier en *f*, & l'autre en *g*. Mais il a été démontré (nº. 292.) que, ſi de l'angle droit *f* d'un triangle réctangle l'on abbaiſſe une perpendiculaire *fd* ſur l'hypothénuſe B*g*, chaque côté, comme B*f*, devient une moyenne proportionnelle

entre l'hypothénuse B g & le segment B d qui répond à ce côté. Ainsi B d . B f : : B f . B g : par la même raison le triangle réctangle B g h, dont B h est l'hypothénuse, sur laquelle g f est abbaissée perpendiculairement de l'angle droit g, donnera cette proportion, B f . B g : : B g . B h, laquelle étant mise à la suite de la première, produira B d . B f : : B f . B g : : B g . B h. Les lignes B f, B g, sont donc moyennes proportionnelles entre les deux lignes B d, B h, ou leurs égales B D, B H; C. Q. F. D.

Quand on voudra trouver trois moyennes proportionnelles, par éxemple, entre B D & B M, il faut que l'instrument ait quatre équerres; & transportant, comme ci-dessus, la plus petite B D sur l'une des règles B C de B en d, ensuite la plus grande B M sur la même règle B C de B en m, on fixera la première équerre au point d, & l'on ouvrira le compas A B C jusqu'à ce que la branche h m de la quatrième équerre passe par l'extrémité m de la plus grande B m des deux lignes données; alors les trois lignes B f, B g, B h, seront les trois moyennes proportionnelles que l'on demande; ce qui se démontre, comme ci-dessus. Car, à cause des trois triangles réctangles B fg, B gh, B hm, & des trois perpendiculaires fd, gf, hg, on aura (n°. 292.) B d . B f : : B f . B g : : B g . B h : : B h . B m; par conséquent les trois lignes B f, B g, B h, sont trois moyennes proportionnelles entre les deux lignes données B d, B m, ou leurs égales B D, B M.

Il est clair que cet instrument s'étend à tel nombre de moyennes proportionnelles que l'on voudra sans aucun tâtonnement.

401. Cependant, quoique l'on ne puisse pas trouver, avec le seul secours de la ligne droite & du cercle, deux moyennes proportionnelles, on en peut trouver trois.

Pour cela on doit sçavoir que cinq grandeurs étant en progression continue, le quatrième dégré de la première est au quatrième dégré de la seconde, comme la première est à la cinquième, c'est-à-dire, qu'ayant ÷ $a . x . y . z . b$, on en déduira $a^4 . x^4 :: a . b$.

Rappellez-vous le n°. 257. où il a été démontré qu'une proportion continue de quatre termes fait que le cube du premier terme est au cube du second, comme le premier est au quatrième. Ainsi $a^3 . x^3 :: a . z$, d'où l'on tire $a^3 z = a x^3$: mais de plus (supp.) $a . x :: z . b$; donc $a b = x z$. Ainsi, en multipliant $a^3 z$ par $a b$, & $a x^3$ par $x z$, $a^4 b z = a x^4 z$. Divisant l'un & l'autre membre par z, on trouve $a^4 b = a x^4$. Donc $a^4 . x^4 :: a . b$. Ceci supposé.

PROBLÊME.

402. Trouver Géométriquement trois moyennes proportionnelles x, y, z, entre les deux lignes données a, b.

RÉSOLUTION.

On suppose que ÷ $a . x . y . z . b$; donc (n°. 401.) $a^4 . x^4 :: a . b$; ainsi $a^4 b = a x^4$; donc $a^3 b = x^4$. Supposant une moyenne proportionnelle f entre a & b, on aura $ff = a b$, & par conséquent $a a ff = x^4$. Tirant la racine quarrée de l'un & de l'autre membre, il vient $a f = x^2$. Donc $a . x :: x . f$, c'est-à-dire, que la première x des trois moyennes proportionnelles x, y, z entre a & b, est une moyenne proportionnelle entre a & f, que l'on trouve géométriquement (n°. 309.) : or la première des trois moyennes proportionnelles étant trouvée, les deux autres s'ensuivent. On peut

peut donc trouver géométriquement, c'est-à-dire, avec la ligne droite & le cercle, trois moyennes proportionnelles entre deux lignes données, quoique l'on ne puisse pas en trouver deux; C. Q. F. D.

403. On en peut même trouver géométriquement 7, 15, &c. Je vais simplement en exposer le moyen. Supposons que l'on demande sept moyennes proportionnelles entre a & b. Appellons x la première de ces sept moyennes proportionnelles. Il y aura donc neuf quantités en proportion continue. Ainsi (n°. 257.) $a^8 . x^8 :: a . b$. Donc $a^8 b = a x^8$, & $a^7 b = x^8$. Cherchez (n°. 309.) une moyenne proportionnelle m entre a & b, pour avoir $mm = ab$, d'où vous déduirez $a^6 mm = x^8$. Tirant la racine quarrée, vous aurez $a^3 m = x^4$. Cherchant encore une moyenne proportionnelle p entre a & m, vous prendrez pp au lieu de am, & la dernière équation deviendra $aapp = x^4$; on en extraira la racine quarrée, ce qui donnera $ap = xx$. Donc $a . x :: x . p$. Voilà donc la première des sept moyennes proportionnelles trouvée en ligne, & par conséquent tout est trouvé (n°. 264.).

Le Problême, qui consiste à trouver deux moyennes proportionnelles géométriques, est fort utile dans la pratique. On peut par son moyen augmenter ou diminuer un corps selon un rapport quelconque, c'est-à-dire, qu'ayant un parallélipipède, une sphère, une piramide, un prisme, &c. on pourra toujours déterminer un autre corps semblable, qui en soit le double, le triple, &c. ou les $\frac{2}{3}$, les $\frac{4}{5}$, les $\frac{3}{7}$, &c.

PROBLÊME.

404. Déterminer un parallélipipède qui ne soit

que les $\frac{3}{7}$ d'un parallélipipède P semblable donné.

RÉSOLUTION.

Soient a, b, c, les trois dimensions du parallélipipède P donné. Appellons x le côté du parallélipipède cherché, qui doit être homologue au côté a. Rappellons-nous maintenant que les corps semblables sont entr'eux comme les cubes de leurs côtés homologues (n°. 391.). Or, puisque l'on demande un parallélipipède qui ne soit que les $\frac{3}{7}$ de P, le cube du côté x ne doit être que les $\frac{3}{7}$ du cube de a. Ainsi $x^3 = \frac{3a^3}{7}$, ou $x^3 \times a = a^3 \times \frac{3a}{7}$. Donc $a^3 . x^3 :: a . \frac{3a}{7}$; ce qui fait voir que le côté x du cube cherché est la première de deux moyennes proportionnelles entre a & $\frac{3a}{7}$ (n°. 397.). Cette ligne ne pouvant se trouver avec le seul secours de la ligne droite & du cercle, on prendra en nombres la valeur du côté a; & comme l'on a l'équation $x^3 = \frac{3a^3}{7}$, on en déduira $x = \sqrt[3]{\frac{3a^3}{7}}$, c'est-à-dire, que l'on aura en nombres la longueur de x, en tirant de $\frac{3a^3}{7}$ la racine cubique très-approchée.

Le côté x étant une fois connu, les deux autres côtés du parallélipipède cherché se trouveront géométriquement; puisque, par la condition du Problême, les trois dimensions de ce parallélipipède doivent être proportionnelles aux trois dimensions a, b, c du parallélipipède donné P.

Supposant donc x connu, & appellant z, y les deux autres côtés que l'on cherche, on dira, $a . x :: b . z$, & les trois premiers termes connus a, x, b de cette proportion, feront connoître le quatrième z. Le troisième côté y se détermine de la même ma-

sphère, en faisant $a.x::c.y$, où l'on voit que y est une quatrième proportionnelle aux trois termes connus a, x, c, & par conséquent le côté y est déterminé. Ainsi, faisant un parallélipipède avec les trois côtés x, z, y, ce parallélipipède sera semblable au parallélipipède P donné, & il n'en sera que les $\frac{3}{5}$.

Le Problême sera plûtôt résolu, s'il s'agit de trouver une Sphère qui soit à une autre dans tel rapport que l'on voudra.

Car supposons que l'on demande une Sphère triple d'une Sphère donnée, dont le diamètre soit d. Appellant x le diamètre de la Sphère cherchée; comme on sçait que les Sphères sont entr'elles comme les cubes de leurs diamètres (n°. 391.), le cube de x sera triple du cube du diamètre d: ainsi $x^3 = 3d^3$; d'où l'on tire $x = \sqrt[3]{3d^3}$, c'est-à-dire, qu'en triplant le cube du diamètre donné, la racine cubique de ce triple sera connoître la longueur du diamètre cherché.

L'Artillerie fait un très-grand usage de ce Problême; il donne des boulets dans telle proportion que l'on veut.

Un corps brut, c'est-à-dire, couvert d'inégalités, tel qu'un caillou, ne paroît pas susceptible d'une mesure bien éxacte; cependant on peut en approcher de fort près.

PROBLÊME.

405. Trouver la solidité d'un corps brut.

RÉSOLUTION.

Préparez un vase cubique ou parallélipipède d'une mesure connue, dont la hauteur soit divisée

quarrée pour base & un pied de hauteur, c'est ce qu'on appelle *un pied de toise cube*.

Si vous imaginez que la hauteur du pied de toise cube soit divisée en douze parties égales, & que par les points de division l'on fasse passer des plans parallèles à la base, il en résultera douze tranches qui auront chacune une toise quarrée pour base & un pouce de hauteur; chacune de ces tranches est *un pouce de toise cube*. Le pied de toise cube contient 12 de ces pouces, & la toise cube en contient 72.

Pareillement une *ligne de toise cube* est un solide dont la base est une toise quarrée, & la hauteur n'est que d'une ligne; dites la même chose par rapport au *point de toise cube*.

On voit par-là que la toise cube contient 6 pieds de toise cube. Que le pied de toise cube vaut 12 pouces de toise cube. Le pouce de toise cube = 12 lignes de toise cube; enfin la ligne de toise cube = 12 points de toise cube; ensorte que le toisé des solides a précisément les mêmes divisions que le toisé des longueurs: ce qui est très-bien imaginé.

Avant d'en venir à la pratique, remarquez donc bien qu'une toise quarrée, multipliée par des pieds, donne des pieds de toise cube, dont il en faut 6 pour la valeur de la toise cube. Que la même toise quarrée, multipliée par des pouces, produit des pouces de toise cube, dont le pied de toise cube en contient 12, & la toise cube 72. Pareillement, si l'on multiplie une toise quarrée par des lignes, on aura des lignes de toise cube, dont le pouce de toise cube en contiendra 12, & le pied de toise cube en vaudra 144. Enfin des points, qui multiplient une toise quarrée, produisent des points de toise cube. Il en faut 12 pour la ligne de toise cube, 144 pour le pouce de toise cube, &c.

PROBLÊME.

408. Trouver la solidité d'un parallélipipède, dont la largeur = 2 toises, 1 pied, 3 pouces; la longueur = 3 toises, 2 pieds, 4 pouces; & la hauteur = 1 toise, 5 pieds, 9 pouces.

RÉSOLUTION.

On disposera ces trois dimensions les unes sous les autres, chaque espèce dans la colonne qui lui convient, ainsi que l'opération l'indique.

OPÉRATION.

Toises.	Pieds.	Pouces.	Lignes.	Points.
2	1	3	0	0
3	2	4	0	0
1	5	9	0	0
2	1	3	0	0
3	2	4	0	0
6	3	9	0	0
	4	5	0	0
		8	10	0
7	2	10	10	0 (B)
1	5	9	0	0
7	2	10	10	0
3	4	5	5	0
2	2	11	7	4
	3	8	10	10
	1	10	5	5
14	3	11	2	7

Et après avoir tiré une ligne sous ces dimensions, on écrira une seconde fois les deux premières, afin

de les multiplier l'une par l'autre, comme il a été enſeigné au toiſé des ſurfaces; ce qui produira 7 toiſes quarrées, 2 pieds, 10 pouces, 10 lignes de toiſe quarrée, que l'on peut regarder comme la baſe (B) du ſolide propoſé. On multipliera enſuite cette baſe par ſa hauteur, c'eſt à-dire, par la troiſième dimenſion = 1 toiſe, 5 pieds, 9 pouces, que l'on diſpoſera pour cet effet ſous 7 toiſes, 2 pieds, 10 pouces, 10 lignes de toiſe quarrée, & tirant une ligne ſous ces deux dimenſions, on multipliera tous les termes de la première ſucceſſivement par chaque terme de la ſeconde; ainſi l'on dira: 10 lignes de toiſe quarrée multipliées par 1 toiſe, donnent 10 lignes de toiſe cube, c'eſt-à-dire, un parallélipipède, dont la baſe eſt une toiſe quarrée & la hauteur 10 lignes, parce que 10 lignes de toiſe quarrée repréſentent un parallélogramme long d'une toiſe & large de 10 lignes; par conſéquent en multipliant ce parallélogramme par 1 toiſe, c'eſt-à dire, en lui donnant une toiſe de hauteur, il en naît un parallélipipède, dont la hauteur & la longueur valent chacune une toiſe, & l'épaiſſeur eſt de 10 lignes. Or la hauteur & la longueur forment enſemble une toiſe quarrée, que l'on peut prendre pour la baſe de ce parallélipipède, dont l'épaiſſeur alors ſera de 10 lignes; ce qui produira dix lignes de toiſe cube, ſuivant la définition que nous avons donnée de la ligne de toiſe cube, où nous avons dit que c'étoit un parallélipipède haut d'une ligne ſur une baſe en toiſe quarrée.

On doit appliquer cette explication aux autres dimenſions ſur leſquelles nous allons opérer, afin que l'on nous diſpenſe d'une répétition, qui deviendroit ennuyeuſe même à nos Lecteurs.

En faiſant un ſemblable calcul, & par la même raiſon, l'on trouvera 10 pouces de toiſe cube,

2 pieds de toise cube, & 7 toises cubes.

Il faudra ensuite multiplier la dimension B par 5 pieds, en considérant que le produit de cette dimension par une toise étant 7 toises cubes, 2 pieds, 10 pouces, 10 lignes de toise cube, si on partage 5 pieds en 3 + 2, on ne doit prendre que la moitié & le tiers du produit de 1 toise; on écrira donc 3 toises cubes, 4 pieds, 5 pouces, 5 lignes de toise cube, pour la valeur d'une demi-toise ou de 3 pieds, & 2 toises cubes, 2 pieds, 11 pouces, 7 lignes, 4 points pour celle de 2 pieds. Après cela, on cherchera le produit de 9 pouces, dont on fera 6 + 3; & l'on prendra d'abord pour 6 pouces, c'est le quart de la valeur de deux pieds, c'est-à-dire, le quart de 2 toises cubes, 2 pieds, 11 pouces, 7 lignes, 4 points de toise cube; ce qui produira 3 pieds, 8 pouces, 10 lignes, 10 points de toise cube, dont la moitie = 1 pied, 10 pouces, 5 lignes, 5 points de toise cube, est la valeur de trois pouces. On fera enfin l'addition des cinq produits qui se trouveront sous la dernière ligne, & l'on verra que la solidité du parallélipipède proposé est de 14 toises cubes, 3 pieds, 11 pouces, 2 lignes, 7 points de toise cube.

PROBLÊME.

409. Déterminer la solidité d'un corps dont la longueur = 15 toises, 5 pieds, 3 pouces; la largeur = 6 toises, 2 pieds, 6 pouces; & la hauteur = 8 toises, 3 pieds, 9 pouces.

RÉSOLUTION.

Après avoir disposé ces trois dimensions, comme l'opération le fait voir,

OPÉRATION.

Toises.	Pieds.	Pouces.	Lignes.	Points.	
15	5	3	0	0	
6	2	6	0	0	
8	3	9	0	0	
15	5	3	0	0	
6	2	6	0	0	
95	1	6	0	0	
5	1	9	0	0	
1	1	11	3	0	
101	5	2	3	0	(A)
8	3	9	0	0	
814	5	6	0	0	
50	5	7	1	6	
12	4	4	9	$4\frac{1}{2}$	
878	3	5	10	$10\frac{1}{2}$	

on cherchera d'abord le produit (A) des deux premières, qui contient 101 toises quarrées, 5 pieds, 2 pouces, 3 lignes de toise quarrée; on écrira sous ce produit la troisième dimension, qui est 8 toises, 3 pieds, 9 pouces.

Et l'on continuera de multiplier le produit A par 8 toises, pour avoir 814 toises cubes, 5 pieds, 6 pouces de toise cube; après quoi il s'agira de trouver la valeur du produit A par 3 pieds: mais, au lieu de 3 pieds, si l'on supposoit 1 toise, il est évident qu'il en résulteroit 101 toises cubes, 5 pieds, 2 pouces, 3 lignes de toise cube; ainsi pour 3 pieds l'on ne prendra que la moitié du produit de 1 toise, c'est-à-dire, 50 toises cubes, 5 pieds, 7 pouces,

1 ligne, 6 points de toise cube. Enfin l'on prendra la valeur de 9 pouces, c'est le quart de la valeur de 3 pieds = 12 toises cubes, 4 pieds, 4 pouces, 9 lignes, 4 points $\frac{1}{2}$ de toise cube; après quoi, on fera l'addition des trois produits qui sont sous la dernière ligne, ce qui produira 878 toises cubes, 3 pieds, 5 pouces, 10 lignes, 10 points $\frac{1}{2}$ de toise cube pour la solidité du corps proposé, dont on suppose les trois dimensions complettes.

Je n'entre pas dans un détail fort rigoureux du calcul, me bornant à en indiquer la marche; parce que je dois supposer que l'on y sera fort éxercé, lorsque l'on arrivera à celui-ci, auquel on n'entendroit rien, si l'on ne se rappelloit pas la méthode dont nous avons fait usage pour le calcul des surfaces. Ce n'est point par des pieds quarrés, ni par des pouces quarrés, &c. que nous les avons calculées; mais par des pieds, des pouces, des lignes, des points de toise quarrée, qui sont des réctangles longs d'une toise sur une largeur d'un pied ou d'un pouce, &c. c'est pourquoi, quand ces parallélogrammes viennent à être multipliés par une toise, on a un solide ou plutôt un parallélipipède, dont deux dimensions valent chacune une toise (ce qui fait une toise quarrée) & la troisième dimension est une partie de toise. Il est nécessaire de bien concevoir tout ceci; moyennant quoi, le toisé des surfaces & des solides est précisément le même que celui des simples longueurs, dont l'éxécution est ce qu'il y a au monde de plus facile. Donnons encore quelques Problêmes.

PROBLÊME.

410. On demande la solidité d'un prisme quelconque, dont la première dimension = 3 toises, 1 pied, 7 pouces; la seconde = 2 toises, 4 pieds,

9 pouces ; & la troisième = 2 pieds, 11 pouces.

RÉSOLUTION.

Cherchez d'abord le produit C des deux premières dimensions.

OPÉRATION.

Toises.	Pieds.	Pouces.	Lignes.	Points.
3	1	7	0	0
2	4	9	0	0
	2	11	0	0
3	1	7	0	0
2	4	9	0	0
6	3	2	0	0
1	0	6	4	0
1	0	6	4	0
	1	7	7	0
		9	9	6
9	0	8	0	6 (C
	2	11		
3	0	2	8	2
0	4	6	8	0 $\frac{1}{2}$
	2	3	4	0 $\frac{1}{4}$
	1	6	2	8 $\frac{1}{6}$
4	2	6	10	10 $\frac{11}{12}$

Ce produit est 9 toises quarrées, 8 pouces, 6 points de toise quarrée, que vous multiplierez par 2 pieds, 11 pouces, qui expriment la seconde dimension ; mais comme 2 pieds ne sont qu'une partie de toise, & que l'on n'a pas la valeur de la toise, on la supposera, c'est-à-dire, on imaginera que 9 toises

quarrées, 8 pouces, 6 points de toise quarrée sont multipliés par 1 toise, afin d'avoir 9 toises cubes, 8 pouces, 6 points de toise cube, dont on prendra le tiers pour la valeur de 2 pieds: c'est 3 toises cubes, 2 pouces, 8 lignes, 2 points de toise cube. Il s'agira ensuite de multiplier le produit C par 11 pouces que l'on partagera en trois parties 6, 3, 2, & l'on prendra d'abord pour 6 pouces, (c'est le quart de la valeur de 2 pieds;) ainsi l'on écrira 4 pieds, 6 pouces, 8 lignes, $\frac{1}{2}$ point de toise cube, dont on prendra la moitié = 2 pieds, 3 pouces, 4 lignes, $\frac{1}{4}$ de point de toise cube, pour la valeur de 3 pouces: il ne restera plus que 2 pouces qui sont le tiers de 6 pouces; ce tiers produira 1 pied, 6 pouces, 2 lignes, 8 points $\frac{1}{6}$ de toise cube, qui sont la troisième partie de la valeur de 6 pouces. Faisant enfin l'addition des quatre produits qui sont sous la dernière ligne, on trouvera que la solidité du prisme proposé est 4 toises cubes, 2 pieds, 6 pouces, 10 lignes, 10 points $\frac{11}{12}$ de toise cube.

PROBLÊME.

411. La longueur d'un parallélipipède = 5 pieds, 9 pouces, 6 lignes. Sa largeur est de 2 pieds, 4 pouces, 3 lignes; & son épaisseur = 3 pieds, 6 pouces. Quelle est la solidité de ce corps?

RÉSOLUTION.

Disposez ces trois dimensions comme ci-dessous.

OPÉRATION.

Pieds.	Pouces.	Lignes.	Points.	
5	9	6	0	
2	4	3	0	
3	6			
5	9	6	0	
2	4	3	0	
1	11	2	0	
0	3	10	4	
	0	11	7	
		2	10 $\frac{3}{4}$	
2	3	3	2 $\frac{3}{4}$	(M)
3	6			
1	1	7	7 $\frac{3}{8}$	
0	2	3	3 $\frac{1}{6}$	
			$\frac{1}{16}$	
1	3	10	10 $\frac{29}{48}$	

Et après avoir trouvé le produit M des deux premières, qui est 2 pieds, 3 pouces, 3 lignes, 2 points $\frac{3}{4}$ de toise quarrée, vous multiplierez ce produit par la troisième dimension, c'est-à-dire, par 3 pieds, 6 pouces. Pour y parvenir, on supposera que l'on ait à multiplier le produit M par une toise ; ce qui donneroit 2 pieds, 3 pouces, 3 lignes, 2 points & $\frac{3}{4}$ de toise cube : mais, comme il s'agit de multiplier par 3 pieds, on ne prendra que la moitié du produit M, c'est 1 pied, 1 pouce, 7 lignes, 7 points & $\frac{3}{8}$ de toise cube. Il faut encore multiplier par 6 pouces, c'est-à-dire, par la sixième partie de 3 pieds ; on prendra donc la sixième partie de la

valeur de 3 pieds, qui est 2 pouces, 3 lignes, 3 points $+ \frac{1}{6} + \frac{1}{16}$ de toise cube. On fera l'addition des deux derniers produits, & l'on trouvera que la solidité du corps proposé = 1 pied, 3 pouces, 10 lignes, 10 points de toise cube $+ \frac{29}{48}$ de point de la même toise.

EXAMEN DE LA MÉTHODE DES INDIVISIBLES.

412. COmme mon dessein a été de rendre la Géométrie la plus aisée qu'il me seroit possible, j'ai fait usage des moyens qui pouvoient le plus y contribuer. Ceux qui ont médité sur la mesure des solides, ont mis avec raison cette partie de la Géométrie au nombre des plus profondes; elle a valu au grand Archimède l'honneur si rare, unique peut-être, d'avoir été mis par ses propres rivaux au premier rang des Mathématiciens.

Cependant je n'ai pas crû devoir conduire d'abord par ces routes ceux que j'ai ici en vûe; c'eût été leur supposer des forces acquises, & des Institutions ne sont faites que pour apprendre l'art d'en acquérir, en faisant l'essai du peu que l'on en a.

La méthode des Indivisibles a prévenu beaucoup de Géomètres en sa faveur; & moi-même, pour la faire bien connoître, j'en ai fait usage, à cause de l'extrême facilité qu'il y a de la concevoir. Elle ne suppose aucune Géométrie, aucunes réfléxions préliminaires. Ce sont, pour ainsi dire, les yeux qui en font la démonstration. Voulez-vous que l'on démontre que les parallélogrammes ABCD, GMST (*fig.* 138.) de même base & de même hauteur, sont égaux en surface? Concevez que ces parallélogrammes soient entiérementt couverts d'une

multitude de lignes égales & parallèles à leur base. La somme de ces lignes d'une part n'est pas différente de la surface du parallélogramme qu'elles composent; par conséquent, s'il y a autant de lignes dans le parallélogramme A B C D qu'il y en a dans le parallélogramme G M S T, comme elles sont d'ailleurs supposées égales, chacune à chacune, il faudra bien convenir que ces deux parallélogrammes sont égaux, puisqu'ils contiendront un même nombre de parties égales. Or il est évident que le nombre des lignes qui composent A B C D, est égal au nombre des lignes dont résulte G M S T : car la somme des lignes composantes de part & d'autre est renfermée dans le même espace parallèle, dont l'étendue se mesure sur la perpendiculaire C B = O T.

Les deux parallélogrammes A B C D, G M S T, sont donc composés d'un même nombre de parties égales; ainsi ils sont entiérement égaux; C.Q.F.D.

On s'est conduit sur le même principe pour démontrer que les prismes ou les piramides de même base & de même hauteur avoient des solidités égales. Par la démonstration que nous en avons donnée (n°. 372.), vous avez vû qu'en coupant les deux piramides (*fig.* 127.) dans tous les points de leur hauteur par des plans parallèles à leur base; vous avez vû, dis-je, qu'il en naissoit des surfaces ou des tranches toujours égales à leurs correspondantes, chacune à chacune. Et comme ces tranches, qui composent les piramides de part & d'autre, sont en même nombre, on a conclu encore que les piramides de même base & de même hauteur avoient une égale solidité, parce qu'elles étoient composées d'un même nombre de parties égales.

On a opposé contre cette méthode, qu'il étoit impossible qu'une surface fût composée de lignes sans aucune largeur, & que la solidité d'un corps pût

pût résulter de plusieurs surfaces mises les unes sur les autres. Vous prouvez très-géométriquement, a-t-on dit aux Partisans de Cavaliéri, que les tranches correspondantes des piramides de même base & de même hauteur sont égales. On peut même vous accorder qu'il y a de part & d'autre un égal nombre de tranches ; mais des tranches & des surfaces peuvent-elles jamais composer une épaisseur ? Si cela est, il faudra avouer qu'un corps est composé de surfaces, ou donner aux surfaces composantes une petite épaisseur ; mais qu'est-ce, je vous prie, qu'une surface épaisse ? Une vraie contradiction. D'ailleurs un composé de surfaces ne sçauroit produire que des surfaces.

J'ai pourtant trouvé quelques personnes très éclairées, qui m'ont avoué qu'elles concevoient très-clairement que les surfaces composoient les solides. Il est vrai que beaucoup d'autres non moins attentives ne sçauroient l'imaginer. Ceci fonde déja un doute très-légitime. Tâchons donc de fournir de bonnes raisons aux unes, en découvrant le paralogisme des autres.

La seule manière dont on pourroit concevoir que des surfaces viendroient à composer un solide, c'est qu'elles fussent posées immédiatement les unes sur les autres : or il est impossible de disposer de cette façon plus de deux surfaces. Prenez-en trois : mettez l'une des trois entre les deux autres ; celle du milieu touchera l'inférieure en dessous, & la supérieure en dessus ; elle sera donc composée de deux surfaces qui auront entr'elles quelque distance ; mais deux surfaces attachées ensemble, qui laissent entr'elles quelque distance, composent un vrai solide, en regardant comme un tout ces surfaces & la distance qui les sépare. On a donc supposé l'impossible, quand on a demandé que l'on mît une surface

immédiatement entre deux surfaces : or, si l'on ne peut pas mettre une surface immédiatement entre deux surfaces, on n'en pourra jamais faire résulter un solide ; qui n'est autre chose, ainsi que le prétendent les *Indivisibilistes*, qu'un assemblage de surfaces posées immédiatement les unes sur les autres.

Il n'est pas besoin de développer davantage les conséquences absurdes qui naissent de cette supposition. La plus grande partie des Sectateurs de Cavaliéri en conviennent.

Cependant ils n'abandonnent pas la thèse. Au lieu de tranches superficielles, vous n'avez qu'à supposer, disent-ils, des solides d'une épaisseur infiniment petite, & vous serez pleinement satisfaits : car des solides pourront apparemment composer un solide.

Depuis cette réponse, il paroît que l'on n'a plus inquiété les Partisans des *Indivisibles*, & que leurs principes ont acquis toute l'autorité des premiers axiomes. Cette autorité s'est d'autant plus fortifiée, que les *Indivisibles* aboutissent à des conclusions qui sont démontrées à la rigueur par des voies incontestables. Un rapport si juste pourroit-il être la production d'un faux principe ?

Reprenons la démonstration des *Indivisibilistes*. Les piramides de même base & de même hauteur ont un même nombre de tranches ; on l'accorde. Il est démontré géométriquement que toutes les tranches de l'une sont égales à toutes les tranches de l'autre, chacune à chacune ; on en convient. Or les piramides sont composées de ces tranches. Il est bon de s'expliquer. Sont-ce des tranches superficielles ? Les Défenseurs des *Indivisibles* en ont reconnu l'impossibilité. Il faut donc que ce soient des tranches solides, qui composent les piramides ; ainsi il reste à démontrer que ces tranches solides sont

égales, chacune à chacune. Les *Indivisibilistes* le supposent; leur démonstration est donc une pétition de principe.

A la vérité ils prouvent à la rigueur que les bases entre lesquelles sont comprises les petites tranches élémentaires ou les petites piramides tronquées, ont une égalité correspondante; mais c'est changer l'état de la question. Je demande que l'on m'établisse une égalité de solides, & l'on n'aboutit qu'à une égalité de surfaces. Quel paralogisme!

Je conviendrai tant qu'on voudra, que ces tranches élémentaires correspondantes ont une épaisseur infiniment petite; mais prouvez-moi que chaque tranche infiniment petite est égale en solidité à sa correspondante: car c'est-là précisément l'exposé de la proposition.

On voit maintenant pourquoi la méthode des *Indivisibles* fait parvenir à des vérités démontrées d'ailleurs; c'est qu'il est fort aisé de trouver ce que l'on suppose.

Ainsi ceux qui se conduisent par cette méthode, tombent dans une pétition de principe, ou dans un paralogisme. S'ils supposent que les petites tranches élémentaires correspondantes ont une égale solidité, c'est précisément l'état de la question. Si, après avoir démonré l'égalité des surfaces, qui terminent ces tranches en dessus & en dessous, on en déduit l'égalité de ces petits solides, il y a un paralogisme inconcevable; on passe de l'égalité de quelques portions de surfaces à l'égalité entière des solidités.

Enfin voici une Démonstration aussi rigoureuse qu'aucune que je sçache en Géométrie, par laquelle on va voir que, si les raisons des *Indivisibilistes* étoient légitimes, deux cones, l'un droit & l'autre oblique, de même base & de même hauteur, auroient leurs surfaces convèxes égales; ou que deux

piramides E K, E P, à bases quarrées (*fig.* 127.), l'une droite & l'autre inclinée, de même base & de même hauteur, seroient égales en surface. Ce que l'on pourra appliquer aux prismes, aux parallélipipèdes, aux cilindres.

DÉM. Comme on peut faire autant de coupes parallèles aux bases K, P, dans la piramide E K, que dans la piramide E P (de l'aveu des *Indivisibilistes*); que chaque coupe *s* de l'une est non-seulement égale à chaque coupe *p* correspondante de l'autre (par la Dém. du n°. 372.), mais encore est un polygone semblable à sa base correspondante (371); les bases K, P, étant des quarrés égaux (supp.), les petites coupes *s*, *p*, seront aussi nécessairement des quarrés égaux : ce qu'il faut dire de toutes les autres coupes correspondantes, que l'on pourra faire dans l'intervalle des parallèles E C, L D; par conséquent les circuits de ces quarrés seront égaux; donc, puisqu'il y a autant de circuits d'une part que d'autre (supp.), la somme des valeurs des circuits d'une part sera égale à la somme des valeurs des circuits de l'autre part : mais chaque somme de circuits couvre la surface de sa piramide correspondante; donc, puisque (suivant les *Indivisibilistes*) on peut évaluer les surfaces par les lignes qui les couvrent, & qu'il y a de part & d'autre un même nombre de lignes égales ou de circuits égaux, c'est une nécessité que les surfaces soient aussi égales.

Cependant tous les Géomètres sçavent, & il est très-aisé à démontrer, que la surface de la piramide inclinée P, est plus grande que celle de la piramide droite K, de même base & de même hauteur.

Il me semble que, si les *Indivisibilistes* veulent examiner de bonne foi la force de cette Démonstration, ils avoueront qu'elle est péremptoire; ou,

pour le moins, que leur méthode est très-sujette à conduire à de grands paralogismes : ce qui est un vrai scandale en Géométrie. Messieurs les *Indivisibilistes* sont donc très-fortement invités, ou à passer courageusement condamnation sur leur méthode, ou à nous dire par quels nouveaux étais on peut la soutenir.

Prenez bien garde que les raisons que je viens d'alléguer contre les *Indivisibilistes*, n'attaquent point au fonds *la méthode des Indivisibles*. Peut-être que cette méthode bien analysée ne seroit pas différente de *la méthode d'exhaustion*; mais c'est à quoi je ne veux pas toucher. Je me suis proposé seulement d'éxaminer les raisons sur lesquelles on la fonde; elles m'ont paru si foibles que, si je n'avois pas sçû d'ailleurs comment on établissoit rigoureusement la mesure des surfaces & celle des solides, je croirois encore très-fermement que les élémens de Géométrie ne sont point démontrés. Une proposition a beau être vraie : si on la fonde sur des suppositions fausses, ou sur des idées qui ne sont pas claires, elle appartient en propre à la faculté de douter.

Comme la plûpart des Lecteurs sont plus portés à oppôser de nouvelles difficultés qu'à résoudre celles qu'on leur fait, on ne manquera pas de me dire que j'infirme le principe du calcul différentiel & intégral. Mais je prie ceux qui seront tentés de me faire cette objection, de s'expliquer là-dessus d'une manière claire & intelligible ; & je promets d'apporter à l'éxamen de leurs raisons toute la circonspection qu'éxige l'importance du sujet : car il m'est impossible ici de répondre à des raisons que je ne connois pas. Le vrai principe du calcul différentiel m'a toujours paru si indépendant de la méthode *des Indivisibles*, que la pensée de ceux qui y trouvent

une identité parfaite, m'est entièrement inconcevable.

Mais s'il falloit des autorités dans une question, où l'on doit être à soi-même sa propre lumière, je supplierois que l'on fît attention à ces paroles de l'Archimède moderne, l'incomparable M. Newton. *Contractiores . . . redduntur demonstrationes per methodum indivisibilium : sed quoniam durior est indivisibilium hypothesis, & propterea methodus illa minùs Geometrica censetur, malui demonstrationes rerum sequentium ad ultimas quantitatum evanescentium summas & rationes, primasque nascentium, id est, ad limites summarum & rationum deducere, &c. . . Proindè in sequentibus, si quandò quantitates tanquam ex particulis constantes consideravero, vel si pro rectis usurpavero lineas curvas, nolim indivisibilia, sed evanescentia divisibilia; non summas & rationes partium determinatarum, sed summarum & rationum limites semper intelligi, &c.* (a) Tout cet endroit de M. Newton est fort précis.

M. d'Alembert, de l'Académie Royale des Sciences, va plus loin encore dans son Traité de *Dinamique*, Ouvrage qui feroit beaucoup d'honneur à ceux qui seroient seulement soupçonnés d'en être les Auteurs après vingt ans d'une profonde méditation. *La Méthode des Infiniment petits a un inconvénient; c'est que les Commençans, qui n'en pénètrent pas toujours l'esprit, pourroient s'accoûtumer à regarder ces Infiniment petits comme des réalités; c'est une erreur contre laquelle on doit être d'autant plus en garde, que de grands hommes y sont tombés, & qu'elle a même donné occasion à quelques mauvais Livres contre la certitude de la Géométrie. La Méthode des Infiniment petits n'est autre chose que la Mé-*

(a) Voyez la Section première du premier Liv. des principes de M. Newton, au Scol. du Lemm. XI.

thode des raisons premières & dernières, c'est-à-dire, des rapports des quantités qui naissent, ou qui s'évanouissent. (*a*)

Je ne cite des témoins aussi respectables, que pour rendre un peu plus retenus ceux qui auroient le dessein d'entrer en lice.

Puis donc que la méthode des *Invisibilistes* est insuffisante, il paroît que je ne sçaurois me dispenser de produire une autre manière de démontrer la mesure des solides. Je rendrai un bon service aux gens âpres au travail, à ces esprits vigoureux, qui dans les recherches les plus épineuses ne redoutent que l'incertitude des principes. *Les Indivisibles* pourront toujours être de quelque utilité à cette multitude de Lettrés plus avides de parler, que curieux de sçavoir, qui voudroient s'amuser de science sans qu'une application suivie leur en eût acquis le droit.

CHAPITRE IV.

DE LA SOLIDITÉ DES CORPS, selon la Méthode des Anciens, appellée *Méthode d'Exhaustion.* (*b*)

413. CEtte méthode nous oblige à un ordre de Propositions différent de celui que nous avons suivi dans le Chapitre précédent ; mais, comme l'on est déja un peu préparé à cette matière, on nous permettra d'être plus courts, pourvû que la clarté n'en souffre pas.

(*a*) Traité de Dinamique, pag. 36. imprimé chez David l'aîné en 1743.

(*b*) On verra (n°. 423.) pourquoi on lui a donné ce nom.

PROPOSITION PREMIÈRE.

414. Les Prismes triangulaires droits ou également inclinés, de hauteur égale, & dont les bases sont égales & semblables, sont égaux en solidité.

DÉMONSTRATION.

Considérez le parallélipipède droit ABCDGHMF (*fig.* 132.) coupé par le plan diagonal BDMG ; il est évident que les deux Prismes triangulaires ABDFGM, BDCGMH sont égaux en solidité, puisque toutes les dimensions de l'un, ses bases & ses faces étant égales & semblables à toutes les faces, bases & dimensions de l'autre, chacune à chacune, l'un de ces Prismes se trouve précisément déterminé de la même manière que l'autre : ainsi, comme ces Prismes ne diffèrent en rien, leur solidité est parfaitement égale.

Si vous appliquez ce même raisonnement au parallélipipède oblique *abcdghmf* coupé par le plan diagonal *bdmg*, vous concevrez facilement que le Prisme triangulaire oblique *abdfgm* est égal en solidité au Prisme triangulaire oblique *bdcgmh* ; C. Q. F. D.

PROPOSITION II.

415. Les parallélipipèdes de même base & de même hauteur ont une solidité égale. (*fig.* 139.)

DÉMONSTRATION.

Il s'agit de prouver que le parallélipipède droit BCDEOGHA est égal en solidité au parallélipipède oblique BCDEPLMT appuyé sur la même base BCDE, & qui est de même hauteur, ou qui est situé entre les mêmes plans parallèles BCDE, AOLM.

Remarquez d'abord que ces deux parallélipipèdes ont une partie commune, qui eſt le ſolide BCPTEDGH : ainſi il reſte à démontrer que le Priſme triangulaire COPBAT eſt égal en ſolidité au Priſme triangulaire DGLEHM; mais ces deux Priſmes droits ont des baſes & des hauteurs égales : car on voit que la baſe AOPT du premier eſt égale à la baſe HGLM du ſecond; ces deux Priſmes d'ailleurs ſont ſitués entre les mêmes plans parallèles ; ils ſont par conſéquent égaux en ſolidité (Prop. I. nº. 414.). Donc les deux parties du parallélipipède droit BCDEOGHA ſont égales aux deux parties du parallélipipède oblique BCDEPLMT ; par conſéquent un parallélipipède droit eſt égal en ſolidité à un parallélipipède oblique de même baſe & de même hauteur ; C.Q.F.D.

PROPOSITION III.

416. On trouve la ſolidité d'un parallélipipède droit ou oblique, en multipliant ſa baſe par ſa hauteur.

DÉMONSTRATION.

Elle eſt la même que celle que nous avons donnée (nº. 383.), en ſuppoſant que le parallélipipède ſoit droit.

Mais s'il eſt oblique, il n'y aura qu'à imaginer un parallélipipède droit de même baſe & de même hauteur. On en trouvera la ſolidité par le nº. 383. qui ſera la même que celle du parallélipipède oblique (Prop. 2. nº. 415.).

PROPOSITION IV.

417. Les parallélipipèdes quelconques qui ont des baſes & des hauteurs égales, ſont égaux en ſolidité.

DÉMONSTRATION.

Car, (Prop. 3. n°. 416.) on en auroit la solidité, en multipliant leur base par leur hauteur : or (supp.) les bases & les hauteurs sont égales de part & d'autre, chacune à chacune; donc les produits seroient égaux; ce qui indique une égale solidité.

PROPOSITION V.

418. Les Prismes triangulaires quelconques, droits ou obliques, qui ont une égale hauteur, & des bases égales (sans les supposer semblables, comme on a fait dans la première Proposition), sont égaux en solidité.

DÉMONSTRATION.

Considérez les figures 132. il est clair que les Prismes triangulaires BCDGHM, *bcdghm*, sont chacun moitié des parallélipipèdes, dont les bases & les hauteurs sont égales : or, ces parallélipipèdes sont égaux (Prop. 4. n°. 417.); donc leurs moitiés, c'est-à-dire, les Prismes triangulaires proposés, sont aussi égaux en solidité; C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

419. On détermine la solidité des parallélipipèdes, en multipliant leur base parallélogramme par leur hauteur; on aura donc la solidité de leurs moitiés, c'est-à-dire, des Prismes triangulaires, en multipliant la moitié de leur base parallélogramme par leur hauteur : or la moitié de leur base parallélogramme est la base triangulaire d'un Prisme triangulaire. Par conséquent on détermine aussi la solidité d'un Prisme triangulaire, en multipliant sa base triangulaire par sa hauteur. On n'a qu'à jetter un

coup d'œil. ſur les figures 132. n°. 384. cette vérité devient évidente.

PROPOSITION VI.

420. Les Priſmes polygones quelconques, qui ont des baſes & des hauteurs égales, ont une égale ſolidité.

DÉMONSTRATION.

Car, de même que l'on peut diviſer en Triangles égaux des Polygones égaux, l'on peut auſſi diviſer les Priſmes polygones, qui ont des baſes & des hauteurs égales, en un même nombre de Priſmes triangulaires, de même baſe & de même hauteur. Or (Prop. 5. n°. 418.) les Priſmes triangulaires, dont les baſes & les hauteurs ſont égales, ont une égale ſolidité; donc les Priſmes polygones quelconques, qui ont des baſes & des hauteurs égales, ſont auſſi égaux; C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

421. Puiſque l'on trouve la ſolidité des Priſmes triangulaires, en multipliant leur baſe par leur hauteur (n°. 419.), on déterminera auſſi la ſolidité d'un Priſme Polygone quelconque, en faiſant le produit de ſa baſe par ſa hauteur, à cauſe que ce Priſme polygone peut être réduit en Priſmes triangulaires.

PROPOSITION. VII.

422. Les Priſmes polygones quelconques de même hauteur, ſont entr'eux comme leur baſe.

DÉMONSTRATION.

Appellons P, *p*, les deux Priſmes que nous comparons; B, *b* leurs baſes; H, *h* leurs hauteurs.

On aura (Coroll. précéd.) $P = BH$, & $p = bh$; donc $P . p :: BH . bh$: or $H = h$ (supp.); ainsi $P . p :: B . b$. On prouveroit de la même manière que les Prismes Polygones quelconques de même base, sont entr'eux comme leur hauteur; C. Q. F. D.

J'ai passé rapidement sur ces Propositions préliminaires, afin d'en venir à l'importante Démonstration, où l'on établit l'égalité des piramides qui ont des bases & des hauteurs égales. C'est ici que la méthode des Anciens va se manifester.

LEMME PREMIER. (a)

423. Si l'on inscrit & que l'on circonscrive sans fin un très-grand nombre de Parallélogrammes à une figure plane quelconque, je dis que la somme des Parallélogrammes inscrits différera de la somme des Parallélogrammes circonscrits, moins que d'une surface donnée quelconque, si petite qu'elle puisse être.

DÉMONSTRATION.

Divisez la base BC (*fig.* 140.) du Triangle ABC en autant de parties égales que vous voudrez. Aux points de division élevés les perpendiculaires *os*, *xt*, &c. les Réctangles tels que A*o*SB, *mxts*, sont dits *circonscrits* au Triangle ABC; & les Réctangles *rm*SB, *pyts*, &c. sont *inscrits* au même Triangle. Il s'agit de prouver que la somme des circonscrits peut différer de la somme des inscrits, moins que d'une surface donnée quelconque.

Il est évident que la somme des circonscrits ne surpasse la somme des Réctangles inscrits que du Réctangle AOSB: or, en divisant continuellement la base BC en un plus grand nombre de par-

(a) *Lemme*, c'est une Proposition isolée qui prépare à la suivante.

ties égales, le Réctangle A O S B, (c'eſt-à-dire, la différence des Réctangles circonſcrits aux inſcrits) deviendra toujours plus petit ; mais une grandeur, qui diminue toujours, devient enfin plus petite qu'une grandeur donnée quelconque, qui ne diminue point : ainſi la différence des Réctangles circonſcrits aux inſcrits peut devenir inaſſignable ; & par conſéquent être plus petite qu'aucune grandeur donnée ; C. Q. F. D.

M. Newton, qui goûtoit fort la méthode des Anciens, donne ce Lemme. Je pouvois m'en paſſer; mais ſon extrême facilité me l'a fait choiſir, pour préparer l'eſprit à l'intelligence de celui qui va ſuivre.

COROLLAIRE.

424. La ſomme des Réctangles inſcrits ou celle des circonſcrits peut être telle, que ſa différence avec le Triangle A B C ſoit inaſſignable ; de ſorte que la ſomme des circonſcrits, celle des inſcrits & le Triangle deviendront égaux en dernier reſſort.

Car la limite de l'augmentation de la ſomme des inſcrits eſt le Triangle A B C, qui eſt auſſi la limite de la diminution de la ſomme des circonſcrits ; c'eſt à-dire, que la ſomme des inſcrits ne ſçauroit devenir plus grande que le Triangle dont elle peut approcher de plus en plus, & que la ſomme des circonſcrits ne peut pas auſſi devenir plus petite que le Triangle à l'égalité duquel elle tend ſans ceſſe ; par conſéquent les deux ſommes tendent ſans fin à l'égalité du même Triangle ; elles en approcheront donc ſi près, que leur différence du Triangle ſera inaſſignable, & pourra ſans aucun inconvénient être regardée comme nulle : ainſi la ſomme des Réctangles circonſcrits, celle des inſcrits & le Triangle deviendront égales en dernier reſſort.

LEMME II.

425. Inscrivons à une piramide triangulaire un très-grand nombre de Prismes triangulaires. Je dis que leur somme se confondra enfin avec la piramide, ou que la solidité totale de ces Prismes inscrits ne sera pas différente de celle de la piramide. (*fig.* 141.)

DÉMONSTRATION.

Concevez donc que la ligne *af* qui représente la hauteur de la piramide *afKL*, soit divisée en un très-grand nombre de parties égales par des plans parallèles à la base *fKL* de la piramide; (on la suppose ici divisée en quatre parties égales seulement, afin d'éviter la confusion qui naîtroit d'un plus grand nombre de parties) & représentez-vous que l'on ait inscrit à la piramide les Prismes triangulaires *hc*, *od*, *rf*, dont les faces supérieures continuées produisent les Prismes triangulaires *sf*, *pd*, *mc* circonscrits, & de même hauteur que les inscrits : joignez-y le Prisme circonscrit *gb* de même hauteur que les précédens. Il est visible que la différence des Prismes circonscrits aux inscrits est la somme des solides *gb*, *mt*, *px*, *sy* : or cette somme est égale au seul Prisme circonscrit *sf*. Car les Prismes de même base & de même hauteur étant égaux (n°. 420.), $gb = hc$; donc $gb + mt = hc + mt =$ le Prisme total mc qui est composé de ces deux solides : ainsi $gb + mt = mc$; mais $mc = od$ de même base & de même hauteur; donc $mc + px = od + px =$ le Prisme total pd; par conséquent $gb + mt + px = pd$: or $pd = rf$; donc $pd + sy = rf + sy =$ le Prisme total sf; donc enfin $gb + mt + px + sy = sf$; c'est-à-dire, que

la différence de la somme des Prismes circonscrits à la somme des Prismes inscrits est égale au seul Prisme circonscrit sf. Mais, en divisant la hauteur af en un très-grand nombre de parties, le Prisme sf peut devenir plus petit qu'aucune grandeur donnée, & dans ce cas la différence des Prismes inscrits aux Prismes circonscrits seroit inassignable : or ces Prismes, tant les inscrits que les circonscrits, tendent à l'égalité avec la piramide qui est la limite des uns & des autres (Lem. I. n°. 423.). Donc, dans une division poussée très-loin, la somme des Prismes inscrits approche si près de la piramide entière, que leur différence s'évanouit ; par conséquent la somme des Prismes inscrits est égale en solidité à celle de la piramide, ou, si l'on veut, n'en diffère que d'une quantité inassignable ; C Q. F. D.

On doit s'attacher à bien comprendre ce Lemme, où tout le fonds de la méthode des Anciens est entièrement manifesté : elle consiste, comme l'on voit dans ce cas particulier, à inscrire ou à circonscrire à la piramide un nombre si énorme de Prismes, que l'inscription ou la circonscription en soit, pour ainsi dire, épuisée ; c'est ce qui lui a fait donner le nom de *méthode d'exhaustion* (a). Nous aurons peut être occasion quelque jour de faire voir, que l'application du calcul différentiel & intégral remonte à cette méthode ; mais ce qui nous importe ici, c'est de l'appliquer à la mesure de la piramide.

PROPOSITION VIII.

426. Les piramides triangulaires de même hauteur sont entr'elles comme leurs bases.

DÉMONSTRATION.

Soient les deux piramides ABCD, *abcd* (*fig.* 142.) dont les hauteurs égales AD, *ad*,

(a) *Exhaustion*. Ce mot vien du Latin *exhaustio*, épuisement.

soient divisées en même nombre de parties égales ; par les points de division, imaginez de part & d'autre des plans parallèles à la base ; concevez de plus que l'on ait inscrit à chaque piramide un même nombre de Prismes triangulaires qui ayent une égale hauteur : si ce nombre de Prismes triangulaires inscrits est multiplié sans fin, leur somme ne sera pas différente de la solidité de la piramide à laquelle ils appartiennent (Lem. 2. n°. 425.) ; par conséquent si l'on démontre que chaque Prisme de la piramide A B C D est à chaque Prisme correspondant de l'autre piramide *a b c d*, comme la base B C D de la première est à la base *b c d* de la seconde, il est clair que la somme des Prismes d'une part, sera à la somme des Prismes de l'autre part, c'est-à-dire, que la solidité d'une piramide sera à la solidité de l'autre, comme la base de la première est à la base de la seconde.

Prenons donc les deux Prismes O T, *o t* correspondants. Par la construction, ces deux Prismes ont même hauteur, & par conséquent ils sont entr'eux comme leurs bases (n°. 422.) ; ainsi le Prisme O T triangulaire est au Prisme triangulaire *o t*, comme la base O P M est à la base *o p m* : mais, à cause des sections parallèles, les Triangles O P M, *o p m*, sont semblables à leur base correspondante B C D, *b c d* ; par conséquent $OPM . BCD :: \overline{PM}^2 . \overline{CD}^2 :: \overline{AM}^2 . \overline{AD}^2 :: \overline{am}^2 . \overline{ad}^2 :: \overline{pm}^2 . \overline{cd}^2 :: opm . bcd$ (n°. 306.) : ainsi $OPM . BCD :: opm . bcd$; donc, puisque le Prisme O T est au Prisme *o t* de même hauteur, comme O P M est à *o p m*, on aura aussi $OT . ot :: BCD . bcd$.

On prouvera de même que $RH . rh :: BCD . bcd$, & que $SD . sd :: BCD . bcd$: ainsi le rapport d'un Prisme à son correspondant est égal au

rapport

rapport de tout autre Prisme à son correspondant. Par conséquent OT . *ot* :: RH . *rh* :: SD . *sd*; donc, OT + RH + SD . *ot* + *rh* + *sd* :: OT . *ot* (nº. 258.) :: BCD . *bcd*; c'est-à-dire, que la somme des Prismes inscrits à la piramide ABCD est à la somme des inscrits à l'autre piramide *abcd*, comme la base de la première est à la base de la seconde : mais (nº. 425.) la somme des Prismes inscrits se confond avec la piramide qui en est composée, ou n'en diffère que d'une quantité inassignable ; donc enfin la piramide ABCD est à la piramide *abcd* de même hauteur, comme la base BCD est à la base *bcd*; C. Q. F. D.

PROPOSITION IX.

427. En général, les piramides de même hauteur sont entr'elles comme leurs bases, de quelque figure que ces bases puissent être. (*fig.* 143.)

DÉMONSTRATION.

Considérez la piramide héxagonale ABCDF, & la piramide quadrangulaire *abcd* de même hauteur que l'héxagonale. Divisez leur base en Triangles, afin de résoudre l'une & l'autre piramide en piramides triangulaires. Appellons P la piramide héxagonale, B sa base BCDFGH. Soit aussi nommée *p* la piramide quadrangulaire, & *b* sa base *bcdf* : il s'agit de prouver que P . *p* :: B . *b*.

1º. Par la Proposition 8. nº. 426. les piramides triangulaires de même hauteur sont entr'elles comme leurs bases, ou, en alternant, une piramide triangulaire est à sa base, comme la piramide triangulaire de même hauteur, qui lui est comparée, est à sa base ; donc ABCH . BCH :: ACGH . CGH :: ACDG . CDG :: ADFG . DFG. Ainsi

(n°. 258.) ABCH + ACGH + ACDG + ADFG (P). BCH + CGH + CDG + DFG (B) :: ABCH . BCH ; c'est-à-dire, que l'on a P . B :: ABCH . BCH.

2°. Par la même raison *abcf* . *bcf* :: *acdf*. *cdf*. Donc (n°. 258.) *abcf* + *acdf* (p). *bcf* + *cdf* (b) :: *abcf* . *bcf*, ou *p* . *b* :: *abcf*. *bcf* : or *abcf* . *bcf* :: ABCH . BCH (n°. 426.) :: P . B. (Art. 1°.) ; par conséquent, P . B :: *p* . *b*, ou, en alternant, P . *p* :: B . *b*, c'est-à-dire, que les piramides polygones quelconques de même hauteur sont entr'elles, comme leur base ; C. Q. F. D.

PROPOSITION X.

428. Les piramides quelconques de même hauteur & de même base, ou de bases égales, ont une égale solidité.

DÉMONSTRATION.

On vient de voir (Prop. 9. n°. 427.) que les piramides quelconques de même hauteur étoient entr'elles comme leurs bases : or l'on suppose les bases égales ; donc les piramides sont aussi égales : ainsi les piramides de même base & de même hauteur ont une égale solidité ; C. Q. F. D. (*a*)

(*a*) Pour peu que l'on fasse réfléxion à la *méthode d'exhaustion* que les Anciens ont suivie, on verra combien elle est propre, non-seulement à éclairer l'esprit, mais à le conduire à une conviction parfaite ; bien différente en cela de la *méthode des indivisibles*, qui laisse toujours dans l'esprit cette inquiétude, qui poursuit & agite sans relâche ceux qui cherchent la lumière & ne la trouvent pas : car les *Indivisibilistes*, apres avoir établi une égalité de surfaces, en déduisent immédiatement une égal solidité entre les corps qui ont ces surfaces égales ; comme si deux corps ne pouvoient pas avoir des surfaces égales, sans être égaux en solidité ; & quand même cela seroit, il resteroit toujours à le démontrer : mais suivant la *méthode d'exhaustion*, on conclut que les piramides de même base & de même hauteur sont égales, parce qu'elles sont composées d'un même nombre de solides

Après avoir démontré que les piramides de même base & de même hauteur sont égales en solidité, on pourra démontrer, comme dans le Chapitre précédent (n°. 375.), qu'une piramide triangulaire n'est que le tiers d'un Prisme triangulaire de même base & de même hauteur, & en déduire la solidité des autres corps, ainsi que nous l'avons éxécuté en cet endroit.

429. Mais Saunderson, Mathématicien Anglois, aveugle presque de naissance (*a*), a trouvé

démontrés égaux à la rigueur, chacun à chacun; & si l'on veut que la somme de ces solides ne se confonde pas entièrement avec la piramide, qui en est composée, au moins est-il démontré à la rigueur que la différence est inassignable.

(*a*) *Saunderson .... aveugle presque de naissance.* Voici un fait bien singulier; ce n'est point une tradition, ce n'est point le témoignage unanime des anciens Écrivains les plus accrédités: c'est ce que l'on voyoit encore il y a six ans, ce que toute l'Angleterre a pû voir en public pendant près de cinquante-six ans; un homme à qui la petite vérole fit perdre la vûe à l'âge d'un an, de manière que la substance même des yeux ne lui resta pas. Un abscès la fondit totalement. On a sçû de lui-même que l'idée de la lumière s'étoit entièrement effacée de son esprit, & que par rapport aux couleurs il étoit précisément dans le cas d'un aveugle né; & cependant cet homme, indépendamment du Latin, du Grec & du François qu'il sçavoit très-bien, apprit les Mathématiques, composa des Ouvrages en ce genre très-estimés qui sont imprimés en langue Angloise. Ils m'ont été communiqués par M. l'Abbé Sallier Garde de la Bibliothèque du Roi, qui fait toujours un très-bon accueil à ceux qui ont envie d'être utiles au public. Enfin cet aveugle parvint à communiquer ses idées d'une manière si claire & si précise, qu'on le jugea très-capable d'enseigner publiquement. Il fut Professeur des Mathématiques à Cambridge, fameuse Université d'Angleterre. On avoue que très-peu de personnes ont enseigné avec plus de succès une science, où les yeux paroissent absolument nécessaires. Il imagina des machines pour tracer aux yeux de ses Disciples toutes les lignes droites ou courbes nécessaires à ses Démonstrations; ce qu'il éxécutoit avec une précision & une netteté à laquelle il est rare d'atteindre, même avec de bons yeux. Ses talens extraordinaires lui valurent l'honneur d'être membre de la Société Royale de Londres. Il mourut en 1739. âgé de cinquante-six ans.

Le Lecteur curieux ne manquera pas de demander par quel organe Saunderson acquit les idées d'étendue, de corps, de nombres, de proportion, &c. Ce fut par le TOUCHER. L'organe de la vûe est si commode, il fait entrer dans notre ame une prodigieuse quantité d'idées si rapidement, que nous négligeons de faire attention à je ne sçais combien d'idées très-distinctes, que nous attendrions inutilement du ministére des yeux. Quelques Physiciens modernes ont dit que l'organe du TOUCHER étoit le plus grossier de tous les sens.

une manière très-élégante, pour démontrer que l'on devoit déterminer la solidité de la piramide, en multipliant sa base par le tiers de sa hauteur: nous allons faire connoître la construction & la Démonstration du Mathématicien Anglois.

PROPOSITION XI.

430. La solidité d'une piramide droite ou oblique est égale au produit de sa base par le tiers de sa hauteur. (*fig.* 144.)

DÉMONSTRATION.

I. Soit la piramide droite BCDFG, dont la base CDFG est un Quarré; sur cette base construisons le cube MC, dont la hauteur AS soit dou-

Après la vûe je n'en connois point de plus fin ni de plus sûr. Consultez les Chirurgiens; ils vous diront que la science du TOUCHER est une des parties les plus importantes dans leurs opérations.

Mais c'est principalement dans la mesure effective de l'étendue que le TOUCHER l'emporte en précision sur l'organe de la vûe. Oseroit-on assûrer qu'il y a une égalité entière entre deux grandeurs, où les yeux n'apperçoivent aucune différence, si l'on n'y mettoit les mains. Les personnes attentives n'estiment-elles pas les choses beaucoup plus à la main qu'aux yeux? Qui est-ce qui croiroit avoir son compte, s'il achetoit un fond de terre que les yeux seuls auroient mesurée? Il n'y a donc que le TOUCHER qui soit l'organe propre à déterminer à toute rigueur l'étendue, qui est l'objet des Mathématiques.

Je conviens que Saunderson n'a pas dû sçavoir autant de Mathématiques qu'un homme ordinaire, doué d'une égale pénétration; parce que le TOUCHER ne s'étend pas aussi loin, ni aussi rapidement que la vûe; mais il me semble qu'il a dû mieux sçavoir ce qu'il sçavoit.

C'est une expérience constante, que nos idées sont d'autant moins distinctes qu'elles sont plus multipliées, plus fréquentes, plus diverses, plus variées à la fois: or c'est ce que produit l'organe de la vûe. Une idée qui nous vient par ce sens, est presque toujours croisée par mille autres, qui se présentent avec elle. L'ame a beau les chasser, ce sont des opiniâtres qui ne veulent point sortir. Me permettra-t-on de le dire? la porte de nos yeux est en quelque sorte trop grande pour ceux qui méditent. Nous ne sçaurions laisser entrer nos idées une à une; ce qui pourtant seroit assez commode, afin que l'ame n'eût pas en même tems des perceptions mal assorties. Mais le TOUCHER ne nous donne, pour ainsi dire, les idées qu'aussi lentement & qu'à mesure que nous le voulons. L'ame moins surchargée en fait plus facilement l'examen. En un mot, elle compte plus juste, parce qu'elle a moins à compter.

ble de la hauteur B S de la piramide proposée : il est clair que, si du sommet B de la piramide l'on tiroit des lignes à tous les angles de chaque face du cube, il se trouveroit résolu en six piramides de même base & de même hauteur, parce que le sommet B de la piramide est également éloigné de toutes les faces égales du cube ; les six piramides seroient donc égales en solidité (Prop. 10. n°. 428.) : ainsi la piramide B C D F G est la sixième partie du cube M C. Or on a la solidité de ce cube, en multipliant sa base C D F G par sa hauteur A S (Prop. 3. n°. 4 1 6.) ; par conséquent la solidité de la piramide B C D F G est égale au produit de la base C D F G par la sixième partie de A S, ou par le tiers de sa moitié B S, hauteur de la piramide.

Ainsi, quand une piramide à base quarrée est droite, & que sa hauteur n'est que la moitié du côté de sa base, on en a la solidité en multipliant sa base par le tiers de sa hauteur.

I I. Si la piramide L proposée est oblique, à base polygone quelconque & d'une hauteur quelconque, sa base pourra être transformée en un Quarré qui lui soit égal (3 2 2.) ; ce qui donnera une piramide *p* à base quarrée, laquelle ayant même hauteur que la précédente L, lui sera égale en solidité (428.). Soit H la hauteur de la piramide *p*, *c* le côté de sa base quarrée *cc* ; & imaginez une autre piramide P de même hauteur H que la précédente *p*, mais dont le côté de la base soit égal à 2 H, pour avoir une piramide dans le même cas que celle de l'art. I. & dont la base quarrée soit = 4 H H. Il est clair (art. I.) que la solidité de cette piramide P = $4HH \times \frac{H}{3}$: or les piramides *p*, P, de même hauteur H, sont entr'elles comme leurs bases *cc*, 4 H H (4 2 7.

donc $p \cdot P :: cc \cdot 4HH$, ou, (puisque $P = 4HH \times \frac{H}{3}$) $p \cdot 4HH \times \frac{H}{3} :: cc \cdot 4HH$;

d'où l'on tire $p = \frac{4H^2 \times \frac{H}{3} \times cc}{4H^2} = cc \times \frac{H}{3}$; ce qui signifie que la piramide p, de même base & de même hauteur que la supposée L, est égale au produit de sa base cc par le tiers de sa hauteur H.

Ainsi la démonstration de *Saunderson* est générale, ou appliquable à toutes les piramides quelconques. Elle est incomparablement plus simple que celle qui se déduit de la section du Prisme triangulaires en trois piramides égales; section qu'il est très-difficile d'imaginer dans le solide.

COROLLAIRE.

431. Dans les piramides égales, & généralement dans tous les corps égaux en solidité, la base & la hauteur sont en *raison réciproque*.

Quand on compare deux corps, & que la base du premier est à la base du second, comme la hauteur du premier est à la hauteur du second, on dit *que les bases & les hauteurs sont en raison directe*.

Mais si la base du premier est à la base du second, comme la hauteur du second est à la hauteur du premier, alors *les bases & les hauteurs de ces corps sont en raison réciproque*; parce que si la base du premier est plus grande que la base du second, réciproquement la hauteur du second surpasse d'autant la hauteur du premier; ce qui fait une compensation.

Ceci entendu, soient deux piramides P, p, leurs bases B, b, & leurs hauteurs H, h. Par la proposition précédente, $P = \frac{BH}{3}$ & $p = \frac{bh}{3}$; mais (supp.)

$P = p$. Donc $\frac{BH}{3} = \frac{bh}{3}$: ainſi $BH = bh$; d'où l'on tire, $B . b :: h . H$. C'eſt à dire, que la baſe B du premier eſt à la baſe b du ſecond réciproquement, comme la hauteur h du ſecond eſt à la hauteur H du premier.

Nous finirons ici ce Chapitre. Le reſte ſe déduit aiſément de la meſure de la piramide, ainſi qu'on peut le voir au Chapitre précédent, que nous avons traité par la méthode des Indiviſibles, en faveur de ceux qui ne veulent pas approfondir les choſes.

RÉCAPITULATION de la Méthode d'Exhauſtion. Confirmation de cette Méthode.

432. LA Méthode d'Exhauſtion conſiſte, ainſi que nous l'avons vû, à faire voir que deux ou pluſieurs quantités ſont égales, quand on ne peut pas leur aſſigner une différence déterminée; enſorte qu'en ſuppoſant même cette différence d'une petiteſſe énorme, il n'eſt pas poſſible qu'elle convienne à ces grandeurs : car l'on pourra toujours démontrer qu'elles approchent l'une de l'autre plus près que de la quantité ou de la différence aſſignée. Or, quand on ne peut pas aſſigner de différence entre deux grandeurs, & que l'on apperçoit d'ailleurs que la différence que l'on aſſigneroit peut diminuer ſans fin, non-ſeulement juſqu'à échapper aux ſens, mais même à l'imagination, il faut néceſſairement convenir que ces grandeurs ſont égales ; puiſque des grandeurs inégales auroient une différence abſolument déterminée.

Quoique cette vérité ſoit très-lumineuſe, & que la démonſtration en ſoit ſimple, & ſuffiſamment

convaincante, nous n'avons pas crû devoir nous en tenir à cette unique exposition. Si les vérités mathématiques ne sont pas toujours éclairées de la vive lumière des premiers axiomes, au moins on ne leur a jamais contesté l'avantage de porter dans l'ame une conviction parfaite : c'est pourquoi, afin de parvenir à ce but par différens côtés, nous allons faire part à nos Lecteurs de deux nouvelles Propositions, qui suffiroient toutes seules à établir la Méthode d'Exhaustion d'une manière incontestable.

PROPOSITION PREMIÈRE.

433. Si deux grandeurs A, B, sont *la limite* (*a*) d'une même quantité C, ces deux grandeurs seront égales entr'elles.

DÉMONSTRATION.

Deux grandeurs sont égales entr'elles, quand on ne peut pas leur supposer de différence, sans tomber en contradiction : or il n'est pas possible, sans tomber en contradiction, de supposer une différence entre les grandeurs A, B, qui sont la limite de la même quantité C. Car, si l'on veut qu'il y ait une différence entre ces grandeurs, supposons que A surpasse B de la quantité D; donc $A = B + D$: mais (supp.) B est la limite de C, c'est-à-dire que C peut approcher de B plus près que d'une grandeur donnée, sans néanmoins pouvoir la surpasser; par conséquent C sera toujours éloigné de la quantité $B + D$ au moins de la grandeur D.

(*a*) *Limite*. On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur, quand la seconde peut approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée, si petite qu'on la puisse supposer. Ensorte que la différence d'une quantité à sa limite est absolument inassignable.

Or $B + D = A$; donc C ſera toujours éloigné de la grandeur A au moins de la quantité D, ce qui eſt contre la première ſuppoſition ; puiſque A étant la limite de C, il eſt néceſſaire que la grandeur C approche de A plus près que d'une quantité quelconque. On ne ſçauroit donc ſuppoſer une différence entre deux grandeurs qui ſont la limite d'une même quantité, ſans tomber en contradiction ; ainſi ces deux grandeurs ſont néceſſairement égales, C. Q. F. D.

PROPOSITION II.

434. Soit $A \times B$ le produit des deux grandeurs A, B. Suppoſons que C ſoit la limite de la grandeur A, & D la limite de la quantité B. Je dis que $C \times D$, produit des limites, ſera néceſſairement la limite de $A \times B$, produit des deux grandeurs A, B.

DÉMONSTRATION.

Car, puiſque A peut approcher de C auſſi près qu'on veut, & que B peut auſſi approcher de D auſſi près qu'on veut ; donc le produit $A \times B$ des deux grandeurs A, B, approchera de $C \times D$, produit de leurs limites, auſſi près qu'on voudra. Or, quand un produit approche d'un autre produit auſſi près qu'on veut, le ſecond produit eſt la limite du premier. Par conſéquent le produit $C \times D$ des limites, eſt la limite du produit $A \times B$ des deux grandeurs A, B.

COROLLAIRE.

435. On prouvera de même que, ſi l'on a tant

de grandeurs que l'on voudra A, B, F, G, &c. dont les limites soient C, D, E, H, &c. le produit C D E H de toutes les limites sera nécessairement la limite du produit A × B × F × G de toutes les grandeurs proposées.

REMARQUE.

436. Ces deux Propositions renferment tout l'esprit de *la Méthode d'Exhaustion*. Appliquons les à la mesure du cercle. Quand il a été question de cette mesure (n°. 202), nous avons tâché de faire comprendre qu'il falloit multiplier la demi-circonférence par le rayon, afin d'avoir l'aire du cercle; & pour cela nous avons résolu le cercle en un très-grand nombre de Triangles, qui avoient tous leur sommet au centre du cercle, & pour base une portion de circonférence si petite qu'elle ne différoit pas sensiblement d'une ligne droite, ce qui réduisoit le cercle à un Polygone réctiligne; mais cette considération n'étoit pas rigoureuse. Voyons si la Méthode d'Exhaustion réduira à rien toutes les raisons de douter.

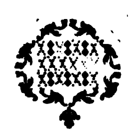
Considérons la figure 51. Pl. 5. où l'on a inscrit un Polygone, dont on peut multiplier le nombre des côtés tant que l'on voudra, afin que son aire approche de plus en plus de la surface du cercle où il est inscrit, sans qu'il puisse jamais surpasser cette surface; ce qui fait que la surface du cercle est la limite de celle du Polygone inscrit quelconque. On appelle *Apothême* une perpendiculaire OB abbaissée du centre sur un des côtés SS du Polygone inscrit. Il est évident que l'aire de ce Polygone inscrit est le produit du demi-périmètre par l'Apothême. Or la circonférence est la limite du périmètre, ou ce qui revient au même, la demi-

circonférence est la limite du demi-périmètre, & le rayon est la limite de l'Apothême; par conséquent (Prop. 2. n°. 434.) le produit de la demi-circonférence par le rayon, c'est-à-dire, le produit des limites, est la limite du produit du demi-périmètre par l'Apothême: mais l'aire du cercle est aussi la limite de ce même produit; donc (Prop. 1. n°. 433.) l'aire du cercle est égale au produit de la demi-circonférence par le rayon; puisque deux grandeurs sont nécessairement égales, quand elles sont chacune la limite d'une même quantité.

COROLLAIRE.

437. Par conséquent, si l'on pouvoit déterminer géométriquement la longueur de la circonférence du cercle, c'est-à-dire, si l'on pouvoit *la rectifier* (*a*), on auroit, à la rigueur, la quadrature du cercle.

(*a*) *Rectifier* une courbe, c'est trouver une ligne droite qui lui soit égale.





DE LA TRIGONOMÉTRIE
Réctiligne par les Sinus.

438. ON a cherché avec un très-grand ſoin les propriétés du Triangle ; il n'y a preſque point de figures qui ne puiſſent s'y réduire. Ainſi l'on peut dire que tout eſt connu dans une figure, ſi biſarre qu'elle puiſſe être, lorſqu'on eſt parvenu à déterminer les angles & les côtés des Triangles, dans leſquels elle peut être réſoluë.

Quoique nous ayons donné pluſieurs méthodes de connoître les côtés & les angles d'un Triangle quelconque ; cependant, comme notre principal deſſein étoit alors d'ouvrir l'eſprit des Commençans, ces méthodes leur ont été propoſées ſeulement à cauſe de la grande facilité qu'il y avoit de les concevoir : car elles ſont ſujettes à de ſi grands inconvéniens dans la pratique, que l'on ne ſçauroit guères compter ſur la préciſion d'une éxécution dont elles ſeroient le fondement.

Il n'y a rien qui paroiſſe plus ſimple que la diviſion d'une échelle ; & peut-être, quelque précaution que l'on y prenne, n'y a-t-il rien de plus rare que d'en avoir d'éxactes. Quelquefois une ligne de l'échelle eſt priſe pour une lieuë ſur le terrein ; il eſt très-poſſible que l'on ſe trompe d'un centième ſur une ligne : cette erreur n'eſt pas diſcernable aux ſens ſur une auſſi petite étendue ; mais la centième partie d'une lieuë, repréſentée par la longueur d'une ligne, eſt quelque choſe de très-conſidérable : c'eſt plus de vingt-une toiſes.

D'un autre côté à combien d'erreurs ne s'expoſe-t-on pas, en rapportant des angles ſur le papier ?

Qu'on les fasse tant soit peu plus petits ou plus grands ; que les lignes qui terminent ces angles soient plus ou moins larges : voilà des sources très-fréquentes d'inéxactitude.

On s'en apperçoit bientôt, quand on passe de la théorie à la pratique. Aussi les Géomètres d'une antiquité très-reculée se sont-ils attachés à la recherche des moyens qui pouvoient diminuer le nombre de ces erreurs.

Comme un Triangle n'est composé que de trois angles & de trois côtés, ils soupçonnèrent d'abord qu'il pouvoit y avoir quelque rapport entre ses angles & ses côtés ; parce que dans un Triangle un plus grand angle est nécessairement opposé à un plus grand côté.

En cas que ce rapport fût constant, il en naissoit un très-grand avantage : ce que l'on auroit calculé pour un Triangle l'auroit été pour une infinité d'autres, qui pouvoient lui être semblables ; ils réduisirent donc cette question à *déterminer le rapport qu'il y avoit entre les angles & les côtés d'un Triangle.*

Quoique l'on ne puisse pas comparer un angle à une ligne, c'est-à-dire, que l'on ne puisse pas se servir immédiatement d'une ligne, pour mesurer un angle ; cependant le rapport d'une ligne à une ligne peut être comparé au rapport d'un angle à un angle : car, s'il y a des lignes doubles, triples, &c. d'autres lignes, il y a aussi des angles qui sont doubles, triples d'autres angles.

439. En conséquence de cette idée on éxamina, *si les côtés d'un Triangle ne seroient pas entr'eux comme les angles opposés à ces côtés.*

On supposa donc le Triangle isoscèle A B C réctangle (*fig.* 145.) dont le côté A B = le côté A C, & l'angle A est double de l'angle B, ou de

l'angle C = B (n°. 79.). Si les angles d'un Triangle étoient entr'eux comme les côtés opposés à ces angles, puisque l'angle A est double de l'angle B, le côté B C, opposé à l'angle A, devroit être double du côté A C opposé à l'angle B; mais il est évident que le côté B C n'est pas double du côté A C: car le côté A B égalant A C, l'on auroit B C = A C + A B, c'est-à-dire, que la ligne droite B C seroit égale à la ligne anguleuse B A C, qui a les mêmes extrémités B, C; ce qui est impossible.

Les angles d'un Triangle ne sont donc pas entr'eux comme les côtés opposés à ces angles.

440. Après avoir reconnu qu'il n'y avoit point de proportion constante entre les angles & les côtés d'un Triangle, il fut naturel de penser que peut-être il y en avoit une entre les angles & les cordes de ces angles, c'est-à-dire, que *les angles d'un Triangle pouvoient être entr'eux comme les cordes de ces angles.*

On circonscrivit donc un cercle à un Triangle isoscèle A B C (*fig.* 145.), que nous supposerons encore réctangle en A; & remarquant que la corde d'un angle étoit la même chose que la corde de l'arc qui mesure cet angle, comme l'angle à la circonférence est mesuré par la moitié de l'arc qui passe entre ses côtés (n°. 104.), on s'apperçut que D C étoit la corde de l'angle B A C, après avoir tiré A D qui passe par le centre. Or il est visible que D C = A C: ainsi A C est la corde de l'arc qui mesure l'angle A.

De même l'angle B à la circonférence a pour mesure la moitié A O de l'arc A O C, qui passe entre ses côtés: ainsi la corde de l'angle B est la ligne A O; par conséquent, si les angles d'un Triangle étoient entr'eux comme leurs cordes corres-

pondantes, on auroit cette proportion : l'angle A est à l'angle B, comme A C corde de l'angle A, est à A O corde de l'angle B : mais (supp.) l'angle A est double de l'angle B ; donc la corde A C de l'angle A seroit double de la corde A O de l'angle B : cependant il est bien évident que A C n'est pas double de A O ; si cela étoit, à cause de A O = O C, la ligne droite A C vaudroit la ligne anguleuse A O C ; cela n'est pas possible.

Les angles d'un Triangle ne sont donc pas entr'eux comme les cordes correspondantes.

Que les angles d'un Triangle ne soient pas entr'eux comme leurs cordes correspondantes, cela est assez facile à présumer ; parce que les angles ne sont pas mesurés par leurs cordes, mais par des arcs qui sont des lignes courbes. Il seroit pourtant possible à la rigueur que des lignes courbes eussent entr'elles le même rapport que des lignes droites, comme deux circonférences de cercle ont entr'elles le rapport de leurs diamètres ; cependant, comme on peut faire des Triangles avec toutes sortes d'angles, & que l'on ne connoît point le rapport de deux arcs de cercle quelconques indéterminés, il paroîtroit difficile que les arcs, qui sont la mesure de ces angles, eussent toujours un rapport exprimable par celui de leurs côtés.

441. Mais ne pourroit-on pas comparer les côtés, non aux angles, mais aux cordes de ces angles, qui sont des lignes droites ? Cela paroît plus vraisemblable. Examinons donc, *si les côtés d'un Triangle ne seroient pas entr'eux comme les cordes des angles opposés à ces côtés.*

Supposons le Triangle A B C réctangle en B, (*fig.* 146.) dont un des côtés A B, soit égal au rayon du cercle, qui lui est circonscrit ; ce côté est donc la moitié du diamètre A C, hypothénuse de

ce Triangle ; & de plus il est la corde d'un angle ou d'un arc de 60 dégrés (par la dém. du n°. 119.). Du centre O abbaissons la perpendiculaire O M T, qui coupe la corde AB & l'arc A T B en deux parties égales (n°. 122.). Tirons la corde B T : elle est sous-tendante d'un arc de 30 dégrés ; & par conséquent c'est la corde de l'angle B C A, lequel ayant son sommet à la circonférence, a pour mesure l'arc T B, moitié de l'arc A T B, qui passe entre ses côtés (n°. 104.). Par la même raison D C, corde du quart de cercle, est la corde de l'angle droit A B C.

Si l'on veut donc que les côtés d'un Triangle soient entr'eux comme les cordes des angles opposés à ces côtés, on aura cette proportion : le côté A C est au côté A B, comme la corde D C de l'angle A B C est à la corde B T de l'angle B C A : or A C est double de A B ; donc la corde D C devroit être double de la corde B T.

Appellons r le rayon $OB = AB = OC = OD = OT$: à cause du Triangle C O D isoscèle réctangle, $\overline{DC}^2 = rr + rr = 2rr$ (n°. 293.) ; ainsi la corde $DC = \sqrt{2rr}$.

Cherchons présentement l'expression de la corde B T : considérons le Triangle Réctangle B M O ; nous aurons $\overline{OB}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{BM}^2$; donc $\overline{OB}^2 - \overline{BM}^2 = \overline{OM}^2$: mais $OB = r$ & $BM = \frac{r}{2}$; ainsi $rr - \frac{rr}{4} = \overline{OM}^2 = \frac{3rr}{4}$ (en donnant la même dénomination aux deux termes $rr - \frac{rr}{4}$) ; par conséquent $OM = \sqrt{\frac{3rr}{4}}$; donc $MT = OT - OM$ devient $= r - \sqrt{\frac{3rr}{4}}$.

Considérons

Considérons encore le Triangle réctangle BMT; nous aurons $\overline{BT}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{MT}^2 = \frac{rr}{4} + rr - 2r\sqrt{\frac{3rr}{4}} + \frac{3rr}{4}$ (en mettant les valeurs des lignes BM, MT,) ce qui se réduit à $\overline{BT}^2 = 2rr - 2r\sqrt{\frac{3rr}{4}}$; & par conséquent $BT = \sqrt{2rr - 2r\sqrt{\frac{3rr}{4}}}$. Nous avons déja trouvé que la corde $DC = \sqrt{2rr}$; par conséquent si DC étoit double de BT, on auroit $\frac{\sqrt{2rr}}{2} = \sqrt{2rr - 2r\sqrt{\frac{3rr}{4}}}$; donc, en quarrant l'un & l'autre membre, $\frac{2rr}{4}$ ou $\frac{rr}{2} = 2rr - 2r\sqrt{\frac{3rr}{4}}$. Donc $\frac{rr}{2} - 2rr = -2r\sqrt{\frac{3rr}{4}}$. Mais $\frac{rr}{2} - 2rr = \frac{rr}{2} - \frac{4rr}{2} = -\frac{3rr}{2}$, (en donnant la même dénomination;) par conséquent $-\frac{3rr}{2} = -2r\sqrt{\frac{3rr}{4}}$; donc, en quarrant l'un & l'autre membre, on aura $\frac{9r^4}{4} = 3r^4$; (& multipliant l'un & l'autre membre par 4) l'équation devient $9r^4 = 12r^4$. Enfin, divisant par r^4, on a l'équation $9 = 12$. Ce qui est absurde.

M. le P. Féry Minime, ancien Professeur de Mathémathiques à l'École de Dessein & de Mathématiques de la Ville de Reims, très-célèbre & très-digne de l'être par ses belles & utiles connoissances dans la science des Hydrauliques, ayant eu

la bonté de me faire connoître combien cette Démonstration coûtoit aux Commençans, je m'appliquai sur le champ à la recherche d'une autre que je vais exposer. (*fig.* 146.).

II. DÉMONSTRATION.

Après avoir transporté BT de C en S, & abbaissé OLR perpendiculairement sur DC, pour avoir CL moitié de CD, & l'angle DCS ou LCS de 30^{d}. parce qu'il a pour mesure la moitié de l'arc DS $= 60^{d}$. (const.) : car l'arc DS $= CD - CS = 90 - 30$. (const.) $= 60^{d}$. menons OS, qui donne l'angle ROS de 15^{d}. étant mesuré par l'arc RS $= CR - CS = 45 - 30$ (const.) $= 15^{d}$. & traçons LS.

Maintenant, si la corde DC étoit double de BT, elle le seroit de CS $=$ BT (const.) : ainsi CL, moitié de DC, égaleroit CS ; donc le Triangle CLS seroit isoscèle, & l'on auroit l'angle CLS $=$ CSL ; ainsi l'angle LCS étant de 30^{d}. comme on l'a vû, les deux angles CLS, CSL, auroient chacun 75^{d}. (n°. 67. Géom. T. 1.) ; donc l'angle CLR étant droit (const.), l'angle SLR n'auroit que 15^{d}. ; ainsi il seroit égal à l'angle ROS, que l'on a vû être aussi de 15^{d}. ; donc l'angle SLR, extérieur au Triangle OLS, seroit égal à l'un des angles intérieurs opposés ROS de ce Triangle, ce qui est impossible (Cor. du n°. 65. Géom. T. 1.) ; donc, &c.

Ayant fait part de cette nouvelle Démonstration à M. le P. Féry, il m'en communiqua une de son invention, qui mérite bien d'avoir ici sa place. La voici telle que j'ai pû me la rappeller : car il y a bien un an qu'il m'en traça la figure, qui fut effacée sur le champ.

III. DÉMONSTRATION DE M. LE P. FÉRY.

Il élève perpendiculairement le rayon O D, & il mène la corde A D de l'angle droit (*fig.* *L. PL.* 18.); alors, si A D étoit double de la corde B T, cette corde B T égaleroit la moitié de A D. Or cela est impossible : car l'arc A T B D étant de 90^d. l'arc A T B de 60, & l'arc B T de 30^d. (const.), les arcs A T, B D, sont nécessairement chacun de 30^d. & par conséquent la corde B T est parallèle à A D; puisqu'alors les angles T B A, B A D, alternes internes, sont égaux, ayant chacun pour mesure la moitié d'arcs égaux A T, B D : mais O T étant (const.) perpendiculaire sur A B, ainsi que l'est B C, il s'ensuit que O T est parallèle à B C; & comme les parallèles entre parallèles sont égales, on voit que la corde B T = R S. Donc, si B T égaloit la moitié de A D, la ligne R S seroit aussi la moitié de A D, ce qui est absurde, n'étant que la moitié de A S partie de A D, puisqu'à cause des Triangles semblables, A B S, A M R, A M . M B : : A R . R S: or (const.) A M = M B; donc A R = R S; donc R S, moitié de A S, ne peut pas l'être de A D; C. Q. F. D.

On ne peut donc pas supposer, que *les côtés d'un Triangle soient entr'eux comme les cordes des angles opposés à ces côtés, sans tomber en contradiction.*

442. Enfin on a remarqué, que *les côtés d'un Triangle étoient entr'eux comme les cordes du double des angles opposés à ces côtés.*

Car, en circonscrivant un cercle au Triangle A D B (*fig.* 147.), il est évident que chaque côté est la corde d'un angle double de celui auquel

ce côté est opposé ; puisque l'angle D, par exemple, qui a son sommet à la circonférence, n'est que la moitié de l'angle, qui auroit pour mesure l'arc A O B, dont le côté A B est la corde.

443. Une observation aussi simple ne paroît pas d'abord devoir procurer de grandes commodités ; cependant les premiers Géomètres réfléchissant sur ce qui pouvoit en résulter, trouvèrent qu'en déterminant en nombres la valeur de toutes les cordes des angles, on pourroit connoître avec une extrême facilité les côtés & les angles d'un Triangle, dont un côté & deux angles seroient donnés, ou deux côtés & un angle, ou enfin les trois côtés.

Pour le faire comprendre par un seul exemple, avant d'entrer dans un détail que nous donnerons bientôt, supposons que l'on connoisse les deux angles A, B, & le côté A B du Triangle A D B (*fig.* 147.) ; je dis qu'avec une simple règle de trois, il sera facile de découvrir la valeur des deux autres côtés A D, D B, & l'angle D : car, 1°. les deux angles A, B, d'un Triangle étant connus, le troisième D l'est nécessairement ; vous n'avez maintenant qu'à faire cette proportion : *la corde du double de l'angle D, est à la corde du double de l'angle B, comme le côté B A opposé à l'angle D, est au côté D A opposé à l'angle B* : or, en supposant que l'on ait déterminé en nombres les cordes de tous les angles, comme on l'a éxécuté effectivement, les trois premiers termes de cette proportion sont connus ; donc le quatrième terme est aussi trouvé.

Par le même moyen on déterminera le côté D B.

444. On voit donc avec qu'elle facilité on parviendroit à connoître tous les angles & tous les côtés d'un Triangle, si l'on avoit en nombres une table de toutes les cordes des angles ; & c'est à quoi les

Géomètres de ces derniers siècles se sont appliqués avec beaucoup de soin : mais au lieu de calculer, comme les Anciens, la valeur des cordes de tous les angles, ils ont trouvé plus de commodité à calculer la valeur de la moitié des cordes ; ce qui revient au même que de calculer les cordes, parce que *les cordes sont entr'elles comme leurs moitiés.*

445. Considérons le triangle inscrit A B C (*fig.* 148.). Nous venons de voir que *les côtés d'un triangle étoient entr'eux comme les moitiés des cordes du double des angles opposés à ces côtés.* Du centre O sur le côté A C abbaissons la perpendiculaire OSD, & tirons le rayon O C. 1°. La corde A C est coupée par la moitié au point S. 2°. L'arc A D C est aussi coupé en deux au point D (n°. 122.) ; ainsi l'angle C O D est égal à l'angle B situé à la circonférence (n°. 104.) : mais l'on a appellé *le Sinus d'un angle*, par exemple, de l'angle C O D, une perpendiculaire C S abbaissée de l'extrémité C de l'arc C D qui mesure cet angle, sur le rayon O D, qui passe par l'autre extrémité D du même arc ; par conséquent l'angle C O D étant égal à l'angle B, la perpendiculaire C S est aussi le Sinus de l'angle B : or C S n'est que la moitié de C A, corde du double de l'angle B ; *le Sinus d'un angle n'est donc que la moitié de la corde du double de cet angle.*

446. Mais il a été démontré que les côtés d'un triangle étoient entr'eux comme la moitié des cordes du double des angles opposés à ces côtés ; puis donc que les moitiés des cordes du double de ces angles sont la même chose que les Sinus de ces angles, il s'ensuit que *les côtés d'un triangle sont entr'eux comme les Sinus des angles opposés à ces côtés.*

447 La découverte de cette vérité occasionna le calcul des Tables des Sinus. Il fut aisé d'apperce-

voir que les Sinus des angles aigus croissoient à mesure que ces angles devenoient plus grands, & qu'ainsi l'on pouvoit déterminer le rapport de ces Sinus. Le Sinus B S (*fig.* 149.) de l'angle B O A, est plus petit que le Sinus C T de l'angle C O A; & si l'angle C O A devenoit l'angle droit D O A, son sinus seroit le rayon D O, qui est le plus grand de tous les Sinus, & c'est pour cela qu'on l'a appellé *Sinus total*.

448. Comme les angles obtus, tel que l'angle B O M, sont plus grands que l'angle droit D O A, on ne conçoit pas d'abord que le Sinus de l'angle droit soit le plus grand de tous les Sinus; mais on remarque bientôt que le Sinus B S de l'angle aigu B O A, n'est pas différent du Sinus de l'angle obtus B O M, qui est *son complément à deux droits* (*a*); puisque la perpendiculaire B S étant la moitié de la corde du double de l'angle obtus B O M, comme on le voit, en prolongeant B S jusqu'en G, il faut qu'elle soit le Sinus de cet angle obtus (n°. 445.).

449. Deux angles différens peuvent donc avoir le même Sinus; c'est pourquoi dans la résolution des triangles on est obligé d'établir un caractère, qui fasse discerner auquel des deux angles appartient un Sinus trouvé.

450. Puis donc que le Sinus de l'angle droit est le plus grand de tous les Sinus, il suffit de déterminer en nombres les Sinus des angles depuis un dégré jusqu'à 90, afin d'avoir le rapport de ces Sinus.

Pour y parvenir, on a supposé que le Sinus total, ou le Sinus de l'angle droit (qui n'est pas différent du rayon du cercle avec lequel on mesure un angle quelconque); on a supposé, dis-je, que le Sinus total fût divisé en dix millions de parties éga-

(*a*) *Complément à deux droits*; c'est ce qu'il faut ajoûter à un angle afin qu'il soit égal à deux angles droits.

les ; ce qui est très-possible, à cause que l'on peut prendre le rayon du cercle, qui sert à mesurer les angles, aussi long qu'il en est besoin. (Nous dirons plus bas, pourquoi on le suppose divisé en un si grand nombre de parties égales.) On a cherché ensuite à déterminer géométriquement combien le Sinus de chaque angle & de chaque minute d'angle contenoit de parties du Sinus total. Après avoir fait cette détermination, on a rangé en colonne la valeur numérique de tous les angles & de leurs minutes, rélativement au Sinus total ; & c'est ce qu'on appelle les *Tables des Sinus*. Quand on veut trouver par leur moyen la valeur des côtés, ou des angles d'un triangle, on dit que l'on fait usage de la *Trigonométrie par les Sinus*.

451. Afin que l'on prenne une idée de la manière dont les Tables des Sinus ont été construites, soit l'angle B O C de 30 dégrés (*fig.* 150). Faites l'arc B A = B C : l'arc C B A est de 60 dégrés ; la corde A C de cet arc est donc égale au rayon du cercle (n°. 119.), ou au Sinus total (n°. 447.) = dix millions ou 10000000 (supp.). Or le Sinus D C de l'angle B O C de 30 dégrés, est la moitié de la corde du double de cet angle, c'est-à-dire est la moitié de la corde A C (n°. 445.) ; par conséquent le Sinus D C de l'angle de 30 dégrés = cinq millions ou 5000000.

Sur le diamèrre B S élevez le rayon perpendiculaire O M : il est évident que l'angle C O M = 60 dégrés : du point C abbaissons la perpendiculaire C P sur le rayon O M. Cette perpendiculaire C P est le Sinus de l'angle C O M de 60 dégrés, (n°. 445.), qui est *le complément à un droit* (*a*) de l'angle B O C de 30 dégrés.

(*a*) *Complément à un droit* ; c'est ce qu'il faut ajoûter à un angle, afin que sa valeur soit égale à celle d'un angle droit.

Le Sinus d'un angle étant trouvé, il est facile de connoître la valeur de son complément à un droit. On n'a qu'à se rappeller la fameuse propriété du triangle réctangle (n°. 293.) & considérer le triangle réctangle C O D, où l'on connoît l'hypothénuse C O (Sinus total), & le côté D C, moitié de cette hypothénuse ou du Sinus total, d'où l'on tire cette équation, $\overline{CO}^2 = \overline{DO}^2 + \overline{DC}^2$. Ainsi $\overline{CO}^2 - \overline{DC}^2 = \overline{DO}^2$; & par conséquent $DO = \sqrt{\overline{CO}^2 - \overline{DC}^2}$: or $DO = CP$, Sinus du complément à un droit de l'angle B O C; donc $CP = \sqrt{\overline{CO}^2 - \overline{DC}^2}$, c'est-à-dire, que le Sinus C P de 60 dégrés est égal à la racine quarrée de la différence qu'il y a entre le quarré du Sinus total & le quarré de la moitié de ce Sinus. En exprimant le Sinus C P numériquement, on le trouvera = 8660254 parties du Sinus total, qui en contient dix millions.

452. Par la connoissance du Sinus du complément d'un angle à un droit, on parvient facilement à celle du *Sinus verse* d'un angle. On entend par *Sinus verse* d'un angle, par éxemple, de l'angle B O C, la partie B D du diamètre, comprise entre le Sinus C D de cet angle & l'extrémité B de l'arc B C qui en est la mesure: c'est pourquoi, afin de mieux distinguer dans le discours le Sinus verse B D du Sinus C D, on appelle ce dernier, *Sinus droit*.

453. Nous avons fait remarquer (n°. 448.) que le Sinus droit C D de l'angle B O C étoit le même que le Sinus de l'angle obtus C O S, complément à deux droits de l'angle B O C; mais les Sinus verses de ces deux angles sont fort différens: car B D étant

le Sinus verſe de l'angle B O C, D S ſera le Sinus verſe de l'angle obtus C O S (n°. 452.).

Quoique l'on n'ait pas beſoin des Sinus verſes dans la réſolution d'un triangle, nous n'avons pas voulu négliger de les faire connoître. La conſidération de ces lignes peut être utile dans d'autres parties des Mathématiques.

Ainſi, quand on voudra déterminer en nombres le Sinus verſe B D d'un angle B O C, après avoir connu la valeur de ſon Sinus droit D C, & du Sinus C P = O D de ſon complément à un droit, du Sinus total O B on retranchera le Sinus O D de ſon complément à un droit, & le reſte B D ſera la valeur du Sinus verſe de l'angle aigu B O C; ou, s'il s'agit de connoître le Sinus verſe de l'angle obtus C O S, complément à deux droits de l'angle B O C, on ajoûtera le Sinus total O B = O S, au Sinus O D = C P : cette ſomme ſera le Sinus verſe de l'angle obtus C O S.

On a vû que dans la détermination en nombres des Sinus il falloit extraire des racines quarrées. Ces racines ſont rarement éxactes; il y a preſque toujours quelque reſte : c'eſt pourquoi on a ſuppoſé que le Sinus total fût diviſé en un très-grand nombre de parties, afin de les rendre d'une petiteſſe ſi énorme, que l'on pût négliger, ſans aucun inconvénient, ce qui manqueroit à la racine quarrée des nombres, qui déſignent la valeur des Sinus.

Après avoir déterminé en nombres les Sinus de tous les angles & de leurs minutes, par des voies approchantes de celles que nous venons de tenir par rapport à l'angle de 30 dégrés, on a fait une Table de tous ces Sinus, afin que l'on pût les trouver facilement au beſoin, ainſi que nous l'avons déja dit.

Quand nous en ferons à la réſolution des Problêmes, je ferai voir qu'avec la ſeule connoiſſance

des Sinus, on peut les résoudre tous sans aucune exception, & qu'ainsi la théorie de la Trigonométrie consiste en cette unique proposition si simple, *les côtés des triangles sont entr'eux comme les Sinus des angles opposés à ces côtés.*

454. Cependant, comme la pratique des Sciences & des Arts tire sa perfection de la briéveté du tems que l'on emploie à une opération, les Géomètres ne furent point parfaitement contens d'une résolution, qui ne leur paroissoit pas avoir toute l'élégance dont elle étoit susceptible.

Ils s'attachèrent donc à la contemplation de certaines lignes, dont la détermination en nombres, toujours rélativement au Sinus total, leur apporta beaucoup de commodités, parce qu'elles diminuoient considérablement le tems des opérations; il est par conséquent à propos que nous fassions connoître ces lignes (*fig.* 151.).

Reprenons l'angle C O B de 30 dégrés, dont nous avons déterminé en nombres le Sinus droit CD. A l'extrémité B de l'arc B C, qui mesure cet angle, tirons la tangente B G bornée par la ligne O G, qui passe par l'autre extrémité C de ce même arc. La ligne B G est *la tangente* de l'arc B C, ou de l'angle B O C, & la ligne O G en est *la sécante*. Pareillement M S est la tangente de l'arc C M, ou de l'angle C O M, & la ligne O S est la sécante de ce même angle.

Le Sinus droit C D de l'angle B O C, & le Sinus C P = O D de son complément à un droit étant connus, on détermine très-facilement en nombres la valeur de la tangente B G & de la sécante O G de ce même angle; car, à cause des deux parallèles C D, B G, on a cette proportion: O D ou C P Sinus du complément à un droit, est à D C Sinus droit, comme O B Sinus total, est à B G tangente

de l'angle B O C : or les trois premiers termes de cette proportion sont connus ; donc le quatrième terme ou la tangente B G est aussi connnue.

La sécante O G de ce même angle se découvre avec la même facilité ; il n'y a qu'à faire cette proportion : le Sinus du complément à un droit O D ou C P, est au Sinus total O C, comme le même Sinus total O B = O C, est à la sécante O G ; cette sécante est donc une quatrième proportionnelle à trois termes connus, & par conséquent elle est déterminée. On déterminera de même la tangente MS, & la sécante O S de l'arc C M ou de l'angle CO M, complément à un droit de l'angle B O C. En ce cas pour abbréger le discours, quand on veut faire connoître que l'on parle du Sinus, de la tangente & de la sécante du complément d'un angle à un droit, on fait usage des mots *co-sinus*, *co-tangente*, *co-sécante* ; ainsi C P est le co-sinus de l'angle B O C, la ligne M S en est la co-tangente, & O S la co-sécante.

Quand on a eu déterminé en nombres la valeur de la tangente & de la sécante de chaque angle, on a disposé ces valeurs dans les tables des Sinus vis-à-vis celle des Sinus correspondants ; on y a même ajoûté les Logarithmes des Sinus & des tangentes, afin que l'on pût faire par l'addition & la soustraction ce que l'on éxécute communément avec la multiplication & la division. On n'y a pas mis les Logarithmes des sécantes, parce que ces lignes ne rendant pas plus élégante la résolution des Problêmes de la Trigonométrie, on s'en passe absolument.

Les Tables des Sinus, dont je vais faire usage, sont les Tables d'Wlac, corrigées par M. Ozanam ; elles passent pour être fort éxactes, & on les trouve par-tout. Voici la disposition des différentes parties, qui composent ces Tables. On a marqué au

haut de chaque page les dégrés d'un angle, & l'on voit au-dessous six colonnes verticalles. La première colonne contient les minutes de l'angle marqué à cette page; on trouve à la seconde les Sinus, les tangentes à la troisième : ce sont les sécantes à la quatrième, les Logarithmes des Sinus à la cinquième; enfin on voit a la sixième les Logarithmes des tangentes.

Comme l'on a besoin assez souvent des co-sinus & des co-tangentes des angles, ouvrant les Tables des Sinus, si l'on prend les dégrés d'un angle à gauche, on trouve à la page de la droite les dégrés de son complément à un droit, avec son co-sinus, sa co-tangente, sa co-sécante, &c. Par éxemple, vous avez besoin du Sinus d'un angle de 26 dégrés 13 minutes? cherchez la page au haut de laquelle est écrit 26 dégrés, & où la colonne des minutes commence par 0: descendez cette colonne depuis 1 minute jusqu'à 13 minutes. A côté de ce nombre, en allant horisontalement de gauche à droite, on trouve 44176. 68; c'est le Sinus d'un angle de 26 dégrés 13 minutes. Après cela vient le nombre 49242. 24, qui exprime la tangente de ce même angle. Ensuite le nombre 111466. 58 marque la valeur de sa sécante, (le point qui separe les deux chiffres les plus à la droite, signifie que l'on peut négliger ces chiffres sans un grand inconvénient). Allez toujours de gauche à droite sur la même ligne horisontale, vous voyez que le Logarithme du Sinus de cet angle est 9. 6451931, & celui de sa tangente est 9. 6923378. Le premier nombre 9 à la gauche marque un nombre entier, & tous les autres chiffres, qui en sont séparés par un point, forment le numérateur d'une fraction, dont le dénominateur est 1 suivi d'autant de zéros que son numérateur a de chiffres ; ainsi le nombre 9.

6923378 est la même chose que 9 + la fraction $\frac{6923378}{10000000}$ (n°. 79. *algéb.*). Tout de suite à la page droite, au haut de laquelle est écrit 63 dégrés, dans la première colonne verticale qui marque les minutes, on trouve 47 minutes; parce que 63 dégrés 47 minutes sont le complément à un droit de 26 dégrés 13 minutes: car en ajoûtant 63 dégrés 47 minutes à 26 dégrés 13 minutes, on a 90 dégrés, valeur de l'angle droit. Dans cette page de la droite, les Sinus, les tangentes, &c. ont la même disposition qu'à la page de la gauche, & par conséquent on les trouvera, ainsi que nous l'avons expliqué.

455. Quand il s'agira de trouver l'angle d'un Sinus donné, on cherchera dans les Tables le nombre qui exprime ce Sinus; ce nombre trouvé fera connoître l'angle qui lui répond. On veut sçavoir, par exemple, à quel angle appartient le Sinus 55653.73? En feuilletant les Tables, on trouve que ce nombre est le Sinus d'un angle de 33 dégrés 49 minutes.

Ceux qui seront curieux de voir plus particulièrement l'artifice de ces Tables, pourront consulter le P. de Chales, Ozanam, M. Wolf. Ces Auteurs ayant donné des *Cours de Mathématiques*, ont traité au long de la construction & de l'usage des Tables des Sinus; pour nous qui avons un tout autre dessein, il nous a suffi d'en donner une idée.

456. Cette idée est totalement renfermée dans ce petit nombre de mots: *Les Tables des Sinus ne sont rien autre chose qu'un triangle réctangle, dont on a déterminé le rapport des trois côtés, en supposant un de ces côtés divisé en dix millions de parties égales.* Car (*fig.* 150.) lorsque nous avons déterminé le Sinus de l'angle B O C de 30 dégrés, on a pû remarquer que le Sinus total ou le rayon O C, est l'hypothé-

nuſe du triangle réctangle C D O; que le Sinus droit C D de cet angle eſt un des côtés du même triangle; & qu'enfin l'autre côté O D = C P eſt ſon co-ſinus ou le Sinus de ſon complément à un droit.

Il a donc fallu ſeulement calculer autant de triangles réctangles qu'il y a eu de Sinus droits à déterminer; parce que le même triangle, qui ſert à faire trouver le Sinus droit d'un angle, fait auſſi connoître le co-ſinus de cet angle, c'eſt-à-dire, le Sinus du complément de cet angle à un droit.

457. Ainſi, quelque longueur que l'on ſuppoſe aux côtés d'un angle connu, on eſt toujours sûr, par le moyen des Tables, d'avoir en nombres le rapport du Sinus droit de cet angle à ſon Sinus total; puiſqu'il eſt très-aiſé de démontrer, que les Sinus des angles du même nombre de dégrés ſont entr'eux, comme le Sinus total de l'un eſt au Sinus total de l'autre. Regardez la figure 152. L'arc BOC eſt, à la vérité, plus grand que l'arc *b o c*; mais, comme le grand arc B O C eſt la même partie de ſa circonférence entière que le petit arc *b o c* l'eſt de la ſienne, on aura cette proportion: *le Sinus total* A C *eſt au Sinus droit* B D, *comme le Sinus total* A *c eſt au Sinus droit b d*.

Pour en être convaincu, tirons les cordes B C, *b c*. Il eſt évident que les triangles A B C, A *b c*, ſont équiangles ou ſemblables : ainſi A C . A *c* :: B C . *b c*; mais les triangles réctangles B D C, *b d c*, ſont auſſi ſemblables; donc B C . *b c* :: B D . *b d*; par conſéquent ces deux proportions produiſent cette ſuite de rapports égaux, A C . A *c* :: B D . *b d*; ou, en alternant, A C . B D :: A *c* . *b d*; C. Q. F. D.

458. Nous avons préſentement toute la Théorie, qui ſert de fondement à la réſolution des Problêmes de la Trigonométrie. La ſeule vérité que l'on

doit avoir toujours présente à l'esprit, est que *les Sinus des angles sont entr'eux comme les côtés opposés à ces angles*; d'où il est facile de juger, que l'on ne parvient à l'analyse ou à la résolution d'un triangle qu'à l'aide des proportions.

Or pour déterminer tous les termes d'une proportion, il faut absolument qu'il y en ait trois qui soient connus; c'est pourquoi, quand on cherche à connoître les côtés & les angles d'un triangle, (ce qui s'appelle *en faire l'analyse ou en donner la résolution*) s'il n'y a pas trois choses au moins connues dans ce triangle, la résolution en est impossible. Quelquefois même trois ne suffisent pas. Il est bien vrai que les trois côtés d'un triangle en déterminent les angles, comme nous le démontrerons; mais la connoissance des trois angles ne suffit pas à la détermination des trois côtés. Qui est-ce qui ne voit pas qu'il y a une infinité de triangles semblables dont les angles sont égaux, chacun à chacun, & les côtés fort différens? Nous ferons même remarquer que l'on peut connoître deux côtés & un angle d'un triangle, sans qu'il soit possible d'en déterminer le reste.

RÉSOLUTION de tous les Problêmes de la Trigonométrie par cette Proposition unique: *Dans un triangle, les Sinus des angles sont entr'eux comme les côtés opposés à ces angles.*

459. Comme nous allons faire un pérpétuel usage du triangle réctangle, on doit se rappeller 1°. Que deux côtés connus dans ce triangle en déterminent nécessairement le troisième. 2°. Que le Sinus de l'angle droit est le Sinus total.

Ceci supposé. Puisque la Trigonométrie a été principalement inventée, afin de connoître les distances inaccessibles, nous nous attacherons d'abord à déterminer les trois côtés d'un triangle; parce que cette connoissance nous conduira à celle des trois angles. Et pour nous exprimer avec plus de simplicité, nous désignerons le Sinus d'un angle par la lettre S mise à la tête des lettres qui marquent cet angle: ainsi S A B D veut dire le Sinus de l'angle A B D. De même S T signifie le Sinus total.

PROBLÊME I.

460. Trouver la distance A C des deux objets inaccessibles A, C. (*fig.* 153.)

RÉSOLUTION.

Cherchons un lieu commode où nous puissions mesurer une base B D, à laquelle nous rapporterons nos opérations. Aux extrémités B, D, de cette base plaçons successivement le Graphomètre, afin de prendre la valeur des angles A B D, C B D, B D C, B D A; ce qui fera connoitre l'angle A D C, qui est la différence de l'angle B D C à l'angle B D A. Après cela considérons le triangle B A D, dans lequel nous connoissons l'angle A B D, & l'angle B D A, d'où l'on déduit la valeur du troisième angle B A D. On suppose de plus que l'on ait toisé la base B D.

Nous n'avons maintenant qu'à faire cette proportion: le Sinus de l'angle B A D connu par les Tables, est au Sinus de l'angle A B D aussi connu par les Tables, comme la base B D, opposée à l'angle B A D, est au côté A D opposé à l'angle A B D; ou plus simplement, S B A D . S A B D :: B D . A D. Or dans cette proportion les trois premiers termes sont connus: car les deux premiers

le sont

le font par les Tables des Sinus, & le troisième est la base BD, que l'on suppose mesurée ; ainsi le quatrième terme AD est connu (n°. 247.).

Voyons présentement ce que nous connoissons dans le triangle BDC. On a pris la valeur des angles CBD, BDC ; ce qui détermine l'angle BCD. Enfin la base BD est connue ; par conséquent nous aurons cette autre proportion, S BCD. S CBD :: BD . CD, dans laquelle les trois premiers termes sont encore connus ; & par conséquent le quatrième terme CD est déterminé.

Ceci nous fait déja voir qu'*un côté d'un triangle étant connu, avec les deux angles formés sur ce côté, l'on peut facilement déterminer les deux autres côtés.*

Dans le triangle ADC nous connoissons donc la longueur des côtés AD, CD, & l'angle ADC compris entre ces côtés. Voilà donc le problême proposé réduit à cet autre Problême.

PROBLÊME II.

461. Les deux côtés AD, CD du triangle ADC étant donnés, avec l'angle ADC intercepté entre ces côtés, trouver le troisième côté AC (*fig*. 154.).

RÉSOLUTION.

1°. Si l'angle ADC est un angle droit, on aura (n°. 293.) $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$. Donc $AC = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2}$; c'est-à-dire, que pour connoître la distance AC, on extraiera la racine quarrée de la somme des deux quarrés connus $\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$.

2°. Si l'angle ADC (*fig*. 155.) n'est pas droit, mais que les côtés AD, CD connus soient égaux,

alors le triangle A D C est isoscèle ; donc l'angle A = l'angle C ; par conséquent, puisque l'on suppose l'angle D connu, la somme des deux angles A, C sera aussi connue : ainsi la moitié de cette somme donnera la valeur de l'angle A & de l'angle C. Faites donc cette proportion : S D A C . S A D C :: C D . A C, où les trois premiers termes sont connus ; le quatrième A C sera donc déterminé.

3°. Quand les côtés A D, C D connus sont inégaux (*fig.* 156), & que l'angle A D C intercepté est aigu, de l'extrémité C du plus petit côté C D imaginez la perpendiculaire C M sur le plus grand côté A D, & considérez le triangle réctangle C M D, dans lequel le côté C D, l'angle C D M & l'angle C M D sont connus : d'où l'on déduit la valeur de l'angle M C D ; ce qui donne la proportion suivante : S T . S M C D :: C D . M D, dans laquelle les trois premiers termes sont donnés, & par conséquent le quatrième terme M D est connu. Mais (par la supposition) tout le côté A D est connu ; ainsi la partie A M = A D − M D sera aussi déterminée. Et, si l'on fait encore cette autre proportion : S T . S C D M :: C D . C M, où les trois premiers termes sont donnés, on connoîtra la perpendiculaire C M.

Dans le triangle réctangle AMC on connoît donc les deux côtés A M, M C, qui forment l'angle droit. Ainsi, puisque $\overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MC}^2$, l'on aura $AC = \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{MC}^2}$, c'est-à-dire, que la distance A C est égale à la racine quarrée de la somme des deux quarrés connus $\overline{AM}^2 + \overline{MC}^2$; & par conséquent cette distance est connue.

4°. Quand les côtés A D, C D connus sont inégaux (*fig* 157.) & que l'angle A D C inter-

cepté est obtus, de l'angle C imaginez la perpendiculaire C M sur le côté A D prolongé. Dans le triangle C M D réctangle on connoît le côté C D (supp.); l'angle C D M est aussi connu, parce que l'angle A D C est donné ; de plus l'angle C M D est droit (const.); donc le troisième D C M est déterminé. Nous aurons donc cette proportion: S T. S D C M :: C D. D M, dans laquelle les trois premiers termes connus feront connoître le quatrième terme D M. Ajoûtez cette valeur au côté A D connu (supp), & toute la distance A M sera entièrement connue.

En considérant encore le triangle réctangle C M D, on déterminera la longueur de la perpendiculaire C M par cette proportion : S T. S C D M :: D C. C M, dans laquelle les trois premiers termes connus donnent la valeur du quatrième C M.

Dans le triangle réctangle A M C on connoît donc les deux côtés A M, C M qui forment l'angle droit: ainsi il est facile de connoître l'hypothénuse A C, en faisant l'équation $\overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{CM}^2$, d'où l'on tire $AC = \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{CM}^2}$; ce qui veut dire, que la distance A C est égale à la racine quarrée de la somme des quarrés $\overline{AM}^2 + \overline{CM}^2$ connus; cette distance est donc aussi déterminée.

Ainsi, généralement parlant, *on peut connoître, par le moyen des Sinus, le troisième côté d'un triangle dont deux côtés sont connus, avec l'angle intercepté entre ces deux côtés.*

Prenez garde qu'il est nécessaire, pour la résolution de ce Problême, que l'angle A D C connu soit intercepté entre les deux côtés donnés A D, C D. Si cet angle connu, au lieu d'être intercepté,

étoit opposé à l'un des deux côtés donnés, il faudroit avoir recours à quelqu'autre considération, ainsi qu'on va le démontrer dans le Problême suivant.

PROBLÊME III.

462. Les deux côtés inégaux A D, C D d'un triangle étant donnés, avec l'angle D A C opposé à l'un de ces deux côtés, trouver le troisième côté A C. (*fig.* 158.)

RÉSOLUTION.

Elle est impossible, en s'en tenant simplement aux termes de la question.

DÉMONSTRATION.

Si nous faisons cette proportion, C D . A D :: S D A C est au Sinus de l'angle opposé au côté A D, dans laquelle les trois premiers termes sont donnés, il est certain que l'on connoîtra le quatrième terme, c'est-à-dire, le Sinus de l'angle opposé au côté A D; mais ce Sinus peut convenir à deux angles : car nous avons fait remarquer (n°. 448.) que le Sinus d'un angle aigu étoit aussi le Sinus du complément de cet angle à deux droits; par conséquent les Tables des Sinus ne font point connoître la valeur de l'angle D C A opposé au côté A D. Cet angle n'étant pas déterminé; il n'est pas possible de connoître l'angle A D C, dont le Sinus nous conduiroit à la connoissance du troisième côté A C; C. Q. F. D.

463. C'est ce qui nous montre que *deux triangles peuvent avoir deux côtés égaux, chacun à chacun, avec un angle égal opposé au même côte, & être néanmoins fort differents.*

DÉMONSTRATION.

Prenons le triangle ADC (*fig.* 158.), dont

le côté D C est plus petit que le côté D A. Du point D avec le rayon D C décrivons l'arc C O *c* qui coupe le côté A C au point *c*, & tirons D *c*. Il est évident que le Triangle A D C a deux côtés égaux à deux côtés du Triangle A D *c*; puisque A D est un côté commun à ces deux Triangles, que le côté D C = le côté D *c* (par la const.), & que de plus l'angle A, commun à l'un & à l'autre Triangle, est opposé à des côtés égaux. Or, il est visible que le Triangle A D C est fort différent du Triangle A D *c*; par conséquent deux Triangles peuvent avoir deux côtés égaux, chacun à chacun, & un angle égal opposé à un côté égal de part & d'autre, sans avoir le troisième côté égal au troisième côté; C. Q. F. D.

464. Cependant, si l'on ajoute aux données du Problême 3. (nº. 462.) l'espèce de l'angle D C A opposé au côté A D, alors ce Problême sera totalement déterminé, quoique l'on ne sçache pas la valeur de cet angle.

DÉMONSTRATION.

Supposons que quelques circonstances fassent connoître que l'angle D C A est aigu (*fig.* 158.), en reprenant la proportion : C D . A D : : S D A C . S D C A, où les trois premiers termes sont connus; on aura la valeur du Sinus S D C A que l'on trouvera dans les Tables, & par conséquent on trouvera sans équivoque la valeur de l'angle D C A qui répond à ce Sinus, à cause que l'on suppose cet angle aigu; & si on le supposoit obtus, l'angle qui répondroit au Sinus trouvé, seroit l'angle obtus D *c* A, complément à deux droits de l'angle aigu D C A.

Par conséquent, selon que l'angle D C A sera aigu ou obtus, le troisième côté A C cherché sera

plus grand ou plus petit : car l'angle D C A étant aigu, l'angle A D C en sera plus grand, d'où il résulte un plus grand côté A C ; & si l'angle D c A est obtus, l'angle A D c en sera plus petit, ce qui entraîne un plus petit côté A c (n°. 82.) ; C. Q. F. D.

Jusqu'à présent nous n'avons eu en vûe que de parvenir à la connoissance des trois côtés d'un Triangle, dans lequel un côté & deux angles, ou deux côtés & un angle étoient donnés : il reste encore à faire voir comment l'on peut déterminer les trois angles d'un Triangle, dont on connoît la longueur des trois côtés.

PROBLÊME IV.

465. Les trois côtés du Triangle A D C étant connus, en déterminer la valeur de chaque angle. (*fig.* 159.)

RÉSOLUTION.

1°. Si le Triangle proposé est équilatéral (*fig.* 159.), les trois angles en sont égaux, & par conséquent chacun vaut le tiers de 180 dégrés = 60 dégrés.

2°. Quand ce Triangle est isoscèle (*fig.* 160.), c'est-à-dire, quand on suppose que les deux côtés D A, D C sont égaux, il faut imaginer la perpendiculaire D F abbaissée de l'angle D sur le troisième côté A C. On voit bien que cette perpendiculaire tombe sur le milieu du côté A C donné ; par conséquent A F ou F C moitié de A C est aussi connue : ainsi le Triangle réctangle D F C donnera cette proportion : D C . F C :: S T . S F D C, dans laquelle les trois premiers termes connus feront connoître le quatrième terme, qui est le Sinus de l'angle aigu F D C ; cet angle sera donc

connu par les Tables, & par conséquent, on aura la valeur du troisième angle C : or l'angle C = l'angle A, parce que le Triangle A D C est supposé isoscèle ; ainsi l'on pourra connoître le troisième angle A D C.

3°. Si le Triangle A D C est scalène (*fig.* 161.), c'est à-dire, si les trois côtés de ce Triangle sont inégaux, on imaginera encore une perpendiculaire C F abbaissée du plus grand angle A C D sur le plus grand côté A D ; cette perpendiculaire divisera le côté A D en deux segments inégaux A F, F D, qu'il faut tâcher de déterminer : car leur détermination fera connoître chacun des angles du Triangle proposé.

Quoique nous ayons déja donné la solution de ce Problême (n°. 297.), nous allons pourtant la répéter ; parce que nous en tirerons quelques conséquences, qui nous feront découvrir une abbréviation fort utile dans la pratique. (*fig.* 161.)

Soit donc $AD = a$, $CD = b$, $AC = c$, $AF = x$, $DF = a - x$, $CF = y$; & considérons le Triangle Réctangle C F A : nous aurons

$\overline{AC}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{CF}^2$, ou $cc = xx + yy$.

Par la même raison, le Triangle Réctangle C F D nous donne $\overline{CD}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{CF}^2$, ou $bb = aa - 2ax + xx + yy$: substituons dans cette dernière équation cc, en la place de $xx + yy$; on aura l'équation suivante $bb = aa + cc - 2ax$; & en transposant, l'on trouve $2ax = aa + cc - bb$; d'où l'on déduit $x = \frac{aa + cc - bb}{2a}$; ce qui signifie que le plus petit segment A F se détermine, en retranchant le quarré du côté C D de la somme des quarrés des côtés A D, A C, & divisant le reste par le double du

plus grand côté A D. Quand le petit segment A F est connu, on n'a qu'à le retrancher du grand côté A D; cette soustraction fera connoître le grand segment F D.

Après cela, considérant le Triangle Réctangle A F C, on aura cette proportion : A C . A F :: S T . S A C F, qui fera connoître l'angle ACF, & par conséquent l'angle C A D.

De même, le Triangle Réctangle C F D donne cette proportion : C D . F D :: S T . S F C D, d'où l'on tire la connoissance de l'angle F C D, & par conséquent celle de l'angle C D A.

Dans le Triangle A C D on connoît donc à présent l'angle C A D, & l'angle C D A; ainsi le troisième angle A C D est connu. La détermination des trois côtés d'un Triangle en fait donc connoître les angles; par conséquent, nous sommes parvenus à ce que nous nous étions proposés de trouver; C. Q. F. D.

Quand on veut connoître les angles d'un Triangle scalène, dont les trois côtés sont donnés, on voit que toute la difficulté consiste à déterminer l'un des deux segments A F, F D (*fig.* 161.), & que pour trouver le plus petit de ces deux segments A F, il faut quarrer le grand côté A D, quarrer aussi le plus petit côté A C, faire une somme de ces deux quarrés, retrancher de cette somme le quarré du côté moyen C D, & enfin diviser ce reste par le double du plus grand côté A D : car le quotient de cette division donne la valeur du plus petit segment A F, ainsi que le montre l'équation $x = \frac{aa + cc - bb}{2a}$. Mais tout cela est d'un assez grand détail. Si l'on pouvoit parvenir à la connoissance de l'un de ces deux segments par une voie plus courte, la pratique de la Trigonométrie

en feroit plus parfaite. Essayons donc de trouver quelque moyen qui éxige moins de calcul que la manière précédente.

466. Il est évident que les deux segments A F, F D étant connus, leur différence est aussi connue. Or nous avons trouvé par le calcul précédent que le petit segment $AF = \frac{aa + cc - bb}{2a}$. Ainsi le grand segment $FD = AD - AF = a - \frac{aa - cc + bb}{2a} = \frac{2aa - aa - cc + bb}{2a}$, (en réduisant à la même dénomination) ; d'où l'on tire, en ôtant ce qui se détruit, le grand segment $FD = \frac{aa - cc + bb}{2a}$. Par conséquent la différence de ces segments, ou $FD - AF = \frac{aa - cc + bb}{2a} - \frac{aa - 6c + hb}{2a} = \frac{2bb - 2cc}{2a} = \frac{bb - cc}{a}$; c'est-à-dire, que l'expression de la différence des deux segments F D, A F, est $\frac{bb - cc}{a}$. Appellons d cette différence; on aura donc $\frac{bb - cc}{a} = d$: or $\frac{bb - cc}{a} = \frac{\overline{b+c} \times \overline{b-c}}{a}$; ainsi $d = \frac{\overline{b+c} \times \overline{b-c}}{a}$; donc $a \times d = \overline{b + c} \times \overline{b - c}$, ce qui donne cette proportion : $a \,.\, b + c :: b - c \,.\, d$; c'est-à-dire, que l'on trouve la différence des deux segments par cette simple proportion : *le plus grand côté A D (a) est à la somme des deux autres côtés C D, A C (b + c), comme la différence C D — A C (b — c) de ces deux mêmes côtés est à un quatrième terme d, qui est la différence cherchée.*

Mais, selon les conditions du Problême, la somme A D des deux segmens est donnée, & par cette dernière proportion on trouve leur différence; par conséquent on aura facilement la valeur de chaque segment; puisque (n°. 103. *Algèb.*) le plus

grand est égal à la moitié de la somme des segments, plus la moitié de leur différence, & le plus petit est égal à la moitié de la somme des mêmes segments, moins la moitié de leur différence.

Ainsi, au lieu de chercher la valeur de l'un des deux segments, comme nous avons fait d'abord, il sera beaucoup plus expéditif de déterminer la différence de ces segments, en faisant usage de la proportion $a \,.\, b + c :: b - c \,.\, d$, que nous venons de trouver par le calcul.

467. Ceux qui seront curieux de voir comment la Géométrie s'accorde ici avec le calcul, n'ont qu'à faire attention à la construction suivante.

Du point C avec le plus petit côté C A (*fig.* 162.) décrivez un cercle, & prolongez D C jusqu'à sa rencontre H avec la circonférence. Il est clair, 1°. que D H est la somme des deux côtés D C, A C, puisque A C = C H. 2°. Que D M est la différence de ces deux mêmes côtés D C, A C: car, à cause de M C = A C, D C − A C = D C − M C = D M. 3°. D T est la différence des segments D F, A F: on doit se rappeller qu'une perpendiculaire, abbaissée du centre d'un cercle sur l'une de ses cordes A T, coupe cette corde en deux parties égales; ainsi A F = F T; par conséquent D T est la différence du grand segment D F au petit segment A F.

Il faut donc démontrer que le plus grand côté D A est à la somme D H des deux autres côtés D C, A C, comme D M, différence de ces deux mêmes côtés, est à D T, différence des segments D F, A F, faits par la perpendiculaire C F, abbaissée du plus grand angle sur le plus grand côté A D.

Or cela est démontré par la seule construction: car (n°. 287. Prop. XXIII.) si d'un point D, pris hors d'un cercle, on tire deux sécantes D A,

DH, ces lignes entières seront entr'elles réciproquement comme leurs parties DT, DM, qui sont hors le cercle; par conséquent DA . DH : : DM . DT; c'est-à-dire, que le plus grand côté DA est à la somme DH (DC + AC) des deux autres côtés, comme leur différence DM est à la différence DT des deux segments DF, AF. La Géométrie est donc d'accord avec le calcul, ou peut-être est-ce le calcul, qui a fait trouver la construction géométrique.

Nous sommes enfin parvenus à découvrir tous les angles & tous les côtés d'un Triangle, dont trois parties sont données, en y joignant quelque caractère particulier, quand certaines circonstances l'éxigent; pourvû néanmoins que ce ne soient pas simplement les trois angles : car il n'est pas possible avec cette simple connoissance de déterminer les trois côtés d'un Triangle, quoique les trois côtés connus déterminent les angles; il ne nous reste donc plus qu'à faire voir les avantages que l'on a retirés de la contemplation des tangentes.

Utilité des tangentes dans la Résolution des Problêmes de la Trigonométrie par les Sinus.

468. Quoique les tangentes ne soient pas absolument nécessaires à la résolution de ces Problêmes, elles sont pourtant fort utiles. Moins il y a d'opérations à faire, moins aussi les erreurs se multiplient, &, ce que l'on considère beaucoup dans les arts, plus on gagne de tems: or la considération des tangentes réduit quelquefois à deux simples proportions la résolution d'un Problême, que l'on ne pourroit résoudre que par six proportions, si l'on vouloit se borner à l'usage des Sinus; & c'est

une proposition unique, qui va nous procurer cet avantage. Mais, par compensation, elle paroît très-difficile aux Commençans; beaucoup de personnes même très-versées dans la Géométrie, n'apperçoivent pas les routes qui ont pû conduire les Inventeurs à cette découverte. Nous allons tâcher de faire voir les dégrés par où l'on a passé; mais auparavant il faut que nous exposions quelques Préliminaires.

469. C'est le Triangle Réctangle, qui a été notre moyen de résolution dans les Problêmes précédents; il le sera encore à l'égard de celui qui va suivre. Considérez donc qu'un Triangle Réctangle A B C étant donné, si l'on prend pour rayon ou pour Sinus total un des deux côtés A B, B C, qui comprennent l'angle droit A, l'autre côté sera néçessairement la tangente de l'angle qui lui est opposé (*fig.* 163.).

DÉMONSTRATION.

Du point C, avec le rayon B C, décrivez l'arc B O; puisque l'on suppose A B perpendiculaire à l'extrémité du rayon C B, le côté A B est une tangente au cercle, dont l'arc B O est une partie (n°. 105.); par conséquent ce même côté étant déterminé par la sécante C A, qui passe par l'autre extrémité O de l'arc B O qui mesure l'angle BCA, il est clair (n°. 454.) que le côté A B est la tangente de l'angle opposé B C A.

On voit aussi que, si du point A avec le rayon A B on décrivoit un arc B D, le côté B C seroit la tangente de l'angle B A C, qui lui est opposé: ainsi *l'un des deux côtés d'un Triangle Réctangle étant pris pour le Sinus total, l'autre côté est nécessairement la tangente de l'angle qui lui est opposé.*

470. Cette observation fournit un moyen très-

ſimple de connoître tous les angles & l'hypothénuſe d'un Triangle Réctangle, dont on connoît ſeulement les deux côtés qui comprennent l'angle droit. Suppoſons que les deux côtés AB, BC, du Triangle Réctangle ABC ſoient donnés. Pour connoître les deux angles A, C, il n'y a qu'à faire cette proportion, *AB eſt à BC, comme le Sinus total eſt à la tangente de l'angle BAC*, dans laquelle les deux premiers termes AB, BC, ſont donnés, par la ſuppoſition, & le troiſième eſt connu par les Tables; on connoîtra donc le quatrième terme, c'eſt à-dire, la tangente de l'angle BAC; par conſéquent les Tables donneront la valeur de cet angle, & tout de ſuite la valeur de l'angle BCA ſon complément à un droit.

L'hypothénuſe AC eſt préſentement fort aiſée à déterminer, en diſant: *le Sinus de l'angle A eſt au Sinus total, comme le côté BC eſt à l'hypothénuſe AC*: dans cette proportion les trois premiers termes ſont connus; le quatrième terme, c'eſt-à-dire, l'hypothénuſe AC, eſt donc néceſſairement déterminée.

On pouvoit déterminer autrement cette hypothénuſe AC, en tirant la racine quarrée de la ſomme des deux Quarrés faits ſur les deux côtés AB, BC; mais le calcul ſeroit beaucoup plus long qu'en faiſant uſage de la proportion précédente, où le Sinus total, exprimé par une ſuite de zéros précédés de l'unité, abrège conſidérablement le calcul, ſoit que ce Sinus faſſe l'office de multiplicateur, ſoit qu'il faſſe celui de diviſeur.

Que l'on ſe rappelle à préſent le Problême 2, où il s'agit de trouver le troiſième côté d'un Triangle, dont deux côtés inégaux ſont donnés avec l'angle intercepté entre ces côtes: ſi l'on propoſoit en même tems d'en trouver les deux autres angles, il eſt certain que l'on ne pourroit réſoudre entière-

ment ce Problême par le moyen des Sinus, à moins que l'on n'y employât cinq ou six proportions; au lieu que deux seules proportions feront tout connoître, en suivant le chemin que nous allons montrer.

471. Soit donc le Triangle ABC (fig. 164.) dont on connoît les deux côtés inégaux A B, B C, avec l'angle A B C intercepté entre ces côtés; il s'agit d'en déduire la connoissance des deux autres angles B A C, B C A, & celle du troisième côté A C.

Rendons-nous bien attentifs à cette question. 1°. Nous connoissons les deux côtés A B, B C; leur somme est donc connue, & nous pouvons l'exprimer par la seule ligne C M, en faisant le prolongement B M = A B. Que l'on tire maintenant la ligne M A; on aura le Triangle isoscèle A B M.

2°. L'angle A B C est donné (supp.); donc l'angle A B M, son complément à deux droits, est connu: de plus cet angle A B M est extérieur au Triangle A B C; il vaut donc la somme des deux angles inconnus B A C, B C A (n°. 65.), qui sont formés sur le troisième côté A C inconnu, & cette somme est connue.

Donc, si du point B on abbaisse la perpendiculaire B D sur le côté A M, cette perpendiculaire coupera en deux parties égales l'angle A B M, c'est-à-dire, qu'elle divisera en deux parties égales la somme des deux angles B A C, B C A; ainsi l'angle D B M est la moitié de la somme de ces angles: leur somme étant connue, leur moitié D B M est aussi connue.

Non-seulement la perpendiculaire B D divise en deux parties égales la somme A B M des deux angles B A C, B C A: elle divise encore en deux parties égales la ligne M A (n°. 79.), ensorte que M D = D A; donc en coupant C M en deux parties égales au point O, & tirant la ligne D O,

cette ligne sera nécessairement parallèle au côté inconnu A C, puisque l'on a cette proportion : MD. DA :: M O . O C. Ce qui fait voir que les deux côtés du Triangle A M C sont coupés proportionnellement, & par conséquent (n°. 279.) que la ligne D O est parallèle à la ligne A C. On doit encore remarquer que M O est une ligne connuë : car elle est la moitié de la somme C M des deux côtés connus, A B , B C.

Mais, si l'on se souvient que la plus grande de deux quantités est égale à la moitié de leur somme, plus leur demi-différence (n°. 103. *Alg.*), on verra, en supposant B C > B A , que B O est la demi-différence de ces deux côtés ; puisque ajoutant B O à la moitié de la somme O C , on a le plus grand côté B C. Or (supp.) les deux côtés B C, B A, sont connus : ainsi leur différence est donnée ; & par conséquent l'on connoît B O, qui est la moitié de cette différence.

Considérons présentement le Triangle Réctangle M B D. Prenons l'un de ses côtés B D pour Sinus total ; l'autre côté M D est la tangente de l'angle D B M opposé à ce côté (n°. 469.), comme il est très-évident, en décrivant du point B, avec le rayon B D, l'arc du cercle D T. Mais nous avons vû ci-dessus que D B M étoit la moitié de la somme des angles B A C, B C A ; le côté M D est donc la tangente de la demi-somme des angles formés sur le troisième côté A C : cette demi-somme est donnée (par la supp.) ; ainsi la valeur de sa tangente M D est connue par les Tables des Sinus.

Remarquons aussi que dans le Triangle M O D nous connoissons, 1°. M O, moitié de la somme des deux côtés connus A B, B C. 2°. B O, moitié de la différence de ces mêmes côtés. 3°. M D, tangente de la demi-somme des angles B A C,

BCA, formés sur le troisième côté AC. Par conséquent, en mettant ces trois termes dans une proportion, nous leur trouverons un quatrième proportionnel X; ainsi il faut construire cette proportion : MO . BO :: MD . X.

Or il est clair qu'en tirant BS parallèle à OD, la partie SD sera le quatrième proportionnel cherché (n°. 280.); & ce terme sera connu, puisque l'on connoît les trois premiers.

Voyons ce que c'est que la ligne SD. BS étant, par la construction, parallèle à OD, qui est elle-même parallèle au côté AC, il s'ensuit que BS est parallèle à la ligne AC, & qu'ainsi l'angle MBS = l'angle BCA, le plus petit des deux angles inconnus. Mais MBS = MBD − DBS, c'est-à-dire, que MBS, le plus petit des deux angles inconnus, est égal à la moitié MBD de la somme de ces angles, moins l'angle DBS; l'angle DBS est donc la demi-différence des angles BCA, BAC, puisque la plus petite de deux quantités est égale à la moitié de leur somme, moins leur demi-différence (n°. 103. *Alg.*); par conséquent la ligne SD, tangente de l'angle DBS, est aussi la tangente de la demi-différence des deux angles inconnus BCA, BAC.

Reprenons la proportion MO . BO :: MD . SD trouvée ci-dessus; si nous l'énonçons, on verra que *la moitié MO des deux côtés donnés AB, BC, est à BO, moitié de leur différence, comme MD, tangente de la demi-somme connue des deux angles inconnus, est à SD, tangente de la demi-différence de ces mêmes angles.* Or les deux premiers termes de cette proportion sont donnés (supp.), le troisième l'est par les Tables; donc le quatrième est déterminé; c'est-à-dire, que cette proportion fait connoître la demi-différence des deux angles inconnus

connus BCA, BAC : il n'y a plus qu'à ajouter cette demi-différence à la moitié de la somme de ces angles, pour avoir BAC le plus grand des deux angles, ou retrancher cette même demi-différence de la moitié de la somme de ces mêmes angles ; on aura le plus petit angle BCA (*a*).

(*a*) Cette découverte est d'une spéculation beaucoup plus fine que celle du *Quarré de l'hypothénuse*, &c. pour laquelle on fit aux Muses un sacrifice de cent bœufs. Je voudrois connoître l'Auteur de cette belle proposition ; je lui en ferois honneur très-volontiers.

Ceux qui étudient les arts, & qui suivent le progrès des sciences, rencontrent assez souvent de très-belles inventions, dont les Auteurs sont absolument inconnus. On ne sçait à qui attribuer les machines les plus utiles à la Société, la charrue & le moulin. Pourroit-on nommer l'Auteur du compas de proportion, instrument néanmoins qui est tout-à-fait scientifique? On doit au hasard la découverte du Télescope & du Quinquina. En un mot, il semble que les génies les plus célèbres n'ayent produit que des curiosités, & que l'on soit uniquement redevable des commodités les plus essentielles à des hommes grossiers, obscurs, sans lettres, sans théorie.

Quand on considère ces effets, on est assez porté à croire que les hautes sciences & les sublimes spéculations sont d'une très-petite importance. Mais on doit faire réfléxion, que dès les premiers tems de la formation des Sociétés on se mit à penser aux machines de première néceffité. Les besoins naturels y sollicitoient tous les hommes. Dans cet état on mit à profit tout ce que la nature peut présenter de modèles. Il est fort ordinaire de voir un courant d'eau faire tourner les corps soumis à son action. Combien de tourbillons occasionnés par l'impulsion du vent ? Il ne s'agit plus alors que de copier la nature : on disposa donc quelques bâtons sur un essieu ; on présenta cet assemblage à l'action de l'eau ou du vent ; & voilà la première origine du moulin.

Ce mouvement autour d'un essieu ne parut d'abord, sans doute, qu'un léger amusement. La néceffité est industrieuse, elle porte naturellement l'esprit à la réfléxion. Une rouë qui tourne en peut faire tourner une autre ; de nouvelles rouës s'engraînent, & la machine satisfait déja aux besoins les plus pressans.

La première, qui parut en ce genre, dut être aussi grossière que les besoins qui la firent naître. Mais l'expérience en ayant fait connoître les commodités, des besoins plus délicats se firent sentir, le goût s'affina. Il ne suffit pas à la nature de ne point éprouver de mal, elle cherche à être bien ; quand elle y est parvenue, elle veut être mieux : ainsi les hommes, qui succédèrent aux premiers Inventeurs, moins occupés à se défendre contre les premiers besoins, & délivrés en partie du travail de l'invention, en devinrent plus propres à améliorer ce qu'ils possédoient. On vit donc les machines se perfectionner à mesure que nos goûts se développoient ; & si l'Inventeur de la charrue & du moulin est inconnu, c'est que tant d'hommes ont concouru à les amener au dégré de perfection où elles sont, que l'on doit leur attribuer ce que l'on dit des Sciences, qu'elles sont

Alors les trois angles du Triangle A B C seront connus, aussi-bien que les deux côtés A B, B C; c'en est plus qu'il n'en faut pour déterminer le troisième côté A C : car si l'on fait (par prob. 1. *Trig.*) cette proportion: S B A C . S A B C : : B C . A C, où les trois premiers termes sont donnés, il est clair que l'on connoîtra le quatrième terme A C, & qu'ainsi il ne reste plus rien à découvrir dans la question proposée; C. Q. F. T. & D.

Il nous seroit aisé maintenant de résoudre tous les Problêmes qui ont rapport aux distances accessibles

l'ouvrage des hommes, & non pas celui d'un homme. Si nous considérons encore combien tous les hommes sont naturellement portés à essayer ce qui peut satisfaire à leurs premiers besoins, il me semble que, pour trouver les premières machines, il n'a fallu d'autre génie que le besoin même; que plusieurs hommes de contrées différentes ont dû les découvrir, sans s'être rien communiqué, les mêmes besoins ayant fait recourir aux mêmes ressources.

Quant aux machines sçavantes, telles que le compas de proportion & la montre, c'étoit encore si peu de chose dans leur origine, leurs effets étoient si bornés, que l'on fit peu d'attention à leurs premiers Inventeurs. On les oublia même totalement, quand par la suite des tems ces machines acquirent quelque précision, & s'étendirent à un si grand nombre d'usages, qu'elles parurent absolument différentes d'elles-mêmes. Mais Galilée, Descartes, Huygens, Newton sont des Auteurs fort connus; parce que chacun de ces hommes extraordinaires à fait des découvertes, que l'on ne devoit attendre, ce semble, que de plusieurs siécles & de plusieurs nations.

Le Télescope a été découvert par hasard; c'est qu'il est impossible que les premiers élémens d'un art ou d'une science se découvrent autrement: il faut nécessairement partir de quelque expérience. Ceux qui se conduisent autrement, s'exposent à de longs & inutiles travaux. Le sujet même que je traite, nous en fournit un exemple très-remarquable. L'effet des Télescopes vient, comme l'on sçait, de ce que les rayons de lumière passant de l'air dans le verre, & du verre dans l'air, se détournent de leur direction; c'est ce que l'on appelle *faire réfraction*. Ceux qui pensent que la Philosophie doit absolument remonter aux premières causes, ont travaillé beaucoup à découvrir celle de la réfraction. Ils ne sont pas plus avancés que quand ce Phénomène parut d'abord. Les Mathématiciens laissent disputer les Philosophes, & marchent toujours en avant. La théorie & l'art des Télescopes sont presque portés à leur perfection; mais on se demande encore comment la réfraction peut s'opérer. Ne seroit-il pas plus philosophique d'avouer, que les premiers ressorts de la nature nous seront à jamais inconnus? Il me semble qu'un ouvrage, qui détermineroit avec soin les limites de l'esprit humain, seroit un excellent Traité de Philosophie.

& inaccessibles, soit que ces distances soient horisontales, verticales, inclinées à l'horison, ou qu'elles désignent des profondeurs; mais, comme tous ces cas particuliers sont renfermés dans les Problêmes, dont nous avons donné la solution ci-dessus, nous nous bornerons à quelques-uns, afin de ne pas grossir inutilement nos Institutions. Si le Public trouve que cet Ouvrage soit traité selon son goût, & qu'il souhaite d'avoir une énumération éxacte de tous ces cas, nous ne manquerons pas de le satisfaire.

PROBLEME.

472. Trouver d'en bas la hauteur de l'élévation A C perpendiculaire à l'horison, tels que sont les arbres, les clochers, les piramides, les édifices qui s'élèvent, comme l'on sçait, perpendiculairement à l'horison. Nous supposerons d'abord que cette élévation soit accessible par son pied A. (*fig.* 165.)

RÉSOLUTION.

On s'éloignera du pied A jusqu'à une distance B, où l'angle C E D soit entre 30 & 50 dégrés, afin que cet angle ne soit pas trop aigu : supposons qu'il ait 36 dégrés; on mesurera la distance A B = 106 toises.

Rappellez-vous maintenant que dans un Triangle Réctangle, si l'on prend l'un des côtés E D pour Sinus total, l'autre côté C D est la tangente de l'angle E qui lui est opposé; l'angle E est connu, ainsi sa tangente est connue : cherchez donc dans les Tables des Sinus la tangente de l'angle de 36 dégrés = 7265426, afin d'avoir cette proportion : *Le Sinus total 10000000 est à la tangente 7265426 de 36 dégrés, comme la distance AB = 106 toises, est à l'élévation CD cherchée*, dans laquelle les trois premiers termes 10000000,

7265426, 106, étant donnés, on trouvera que le quatrième terme, c'est-à-dire, l'élévation CD = 77 toises & quelques pouces. On ajoutera à cette élévation la hauteur du Graphomètre BE = AD, qui est ordinairement de 4 pieds, & toute l'élévation AC vaudra 77 toises, 4 pieds, quelques pouces.

473. Quand cette élévation AB est totalement inaccessible, ainsi que le représente la figure 166. prenez une station commode au point G: placez-y verticalement le plan du Graphomètre, afin de prendre la valeur de l'angle AOS = 50 dégrés; ce qui donne l'angle AOD = 130 dégrés. Éloignez-vous ensuite du point de station O dans l'allignement de la ligne OS, & prenez une base OD = 40 toises, de sorte que l'angle ADO ne soit pas trop aigu; qu'il ait, par exemple, 30 dégrés: alors l'angle OAD est aisé à connoître; on le trouvera de 20 dégrés.

Cherchons présentement la longueur du côté OA, en faisant cette proportion: le Sinus de l'angle DAO de 20 dégrés est au Sinus de l'angle ADO de 30 dégrés, comme la base DO = 40 toises est au côté AO; ce côté sera donc connu. Présentement le Triangle Réctangle ASO donne cette proportion: le Sinus total est au Sinus de l'angle AOS de 50 dégrés, comme le côté AO, que l'on vient de connoître, est à l'élévation AS. Ajoutez à cette élévation la hauteur de l'instrument OG = SB, & toute la hauteur AB sera connue.

474. Voulez-vous faire usage des Logarithmes? Reprenons le n°. 472. (*fig.* 165.) où l'on a proposé de trouver la hauteur de l'élévation AC accessible par son pied A. On doit se rappeller que l'angle CED a été supposé de 36 dégrés; & qu'ainsi le Triangle Réctangle CDE a fourni cette

proportion: le Sinus total 10000000 eſt à la tangente 7265426 de 36 dégrés, comme la diſtance AB = 106 toiſes eſt à l'évation CD, que l'on trouve, en achevant le calcul, égale à 77 toiſes & quelque choſe.

Mais, pour faire uſage des Logarithmes, au lieu des nombres que nous venons d'écrire, prenons les Logarithmes qui leur répondent. Le Logarithme du Sinus total, ou de l'angle de 90 dégrés, eſt 10.0000000. Celui de la tangente de 36 dégrés eſt 9.8612610; ces deux Logarithmes ſe trouvent dans les Tables des Sinus. Pour le Logarithme de la diſtance AB = 106 toiſes, on le trouvera dans la Table des Logarithmes pour les nombres naturels, qui eſt à la ſuite des Tables des Sinus: ce Logarithme eſt 2.0253059; & au lieu de multiplier l'un par l'autre les moyens de la proportion 10000000 . 7265426 :: 106 . CD, & d'en diviſer le produit par le premier terme 10000000, on prendra la ſomme 11. 8865 3059 des Logarithmes de ces mêmes moyens termes, dont on retranchera le Logarithme 10. 0000000 du premier terme, & la différence 1. 8865669 exprimera le Logarithme du quatrième terme CD (n°. 266.): ſi l'on cherche ce nombre ou le plus approchant dans la Table des Logarithmes pour les nombres naturels, on verra qu'il répond au nombre 77, ainſi qu'on l'a déterminé n°. 472.

Nous avons promis à la fin du n°. 338. pag. 231. (*fig.* 112. & 113. *PL. XIII.*) d'expoſer, dans toutes ſes circonſtances, la ſolution Trigonométrique du Problême, où l'on propoſe de trouver, par une ſeule ſtation C, les diſtances de cette ſtation à trois points A, D, B, dont les éloignemens AB, AD, DB, ſont connus. C'eſt

ici qu'il convient de remplir notre engagement.

La station donnée peut être sur un des côtés du Triangle A D B, ou au dedans, ou au dehors de ce même Triangle.

1°. Si l'on se trouve, par éxemple, en M, (*fig.* 112.) sur l'un des côtés AB, on pourra prendre avec un instrument les angles DMA, DMB; & les côtés A B, A D, D B, étant connus (supp.), tous les angles du Triangle A D B le seront aussi (n° 465.); dans le Triangle A D M, on connoîtra donc l'angle D A M, conclu des trois côtés donnés; de plus l'angle D M A observé, avec le côté AD donné; ce qui suffit (n°. 460.) pour trouver les distances cherchées M D & M A. Et, comme A B est donné, (supp.) ôtant M A de A B, on connoîtra aussi M B; ainsi les trois distances M A, M D, M B, seront toutes connuës.

REMARQUE.

On reconnoîtra que l'on est sur l'un des côtés, si la somme des angles D M A, D M B, est précisément de 180°. ou, quand ayant observé la direction M A d'un côté, on se trouvera dirigé par l'autre côté sur le Point B, sans changer l'Alidade.

2°. Lorsque le point donné se trouvera au dedans du Triangle, comme en C, on observera les angles D C A, D C B, A C B, & l'on imaginera qu'une circonférence passe par les trois points A, C, B; que l'on ait prolongé D C jusqu'à la rencontre de cette circonférence en F, & qu'enfin l'on ait tiré les cordes F A, F B. Cette préparation étant faite, remarquez que l'angle D C A est donné par observation, & par conséquent son supplément A C F; or A C F = A B F; parce que ces deux angles sont à la circonférence du même

cercle, & appuyés sur le même arc AF. Vous remarquerez aisément, par la même raison, que le supplément BCF de l'angle observé DCB est égal à l'angle BAF. Ainsi, dans le Triangle ABF, le côté AB, & les deux angles BAF, ABF, sont connus; on pourra donc connoître AF & FB (n°. 460.). Alors les deux côtés AD, AF, & l'angle intercepté DAF du Triangle DFA étant connus, on en découvrira (n°. 471.) l'angle ADF; &, dans le Triangle ADC, on connoîtra l'angle DCA, par observation, l'angle ADF que l'on vient de trouver, & le côté AD donné; d'où l'on conclura (n°. 460.) les deux distances cherchées CA, CD. Et, pour avoir la troisième CB, on aura recours au Triangle DCB, dans lequel on connoît l'angle DCB observé, l'angle CDB, qui est la différence de l'angle ADB connu à l'angle ADC qu'on vient de découvrir, & enfin le côté DB donné; ce qui fera trouver CB (n°. 460.).

3°. Si le point est donné au dehors du Triangle (*fig.* 112.), comme en F, on observera les angles AFD, DFB, & l'on imaginera une circonférence par les points A, B, F, ainsi que les cordes FA, FB, AC, CB. On considérera alors le Triangle ACB, dans lequel l'angle ABC = AFC angle d'observation; parce qu'ils ont leur sommet à la même circonférence, & qu'ils sont appuyés sur le même arc. Par la même raison, l'angle BAC = l'angle d'observation BFC: on a de plus (supp.) le côté AB connu; d'où l'on conclura (n°. 460.) la longueur des cordes AC, CB. Dans le Triangle DAC on connoîtra donc les côtés AC, AD, & l'angle intercepté DAC; puisque DAC = DAB connu (supp.), moins l'angle BAC, que l'on vient de découvrir. Ainsi

(n°. 471.) on pourra découvrir l'angle ADC; prenant ensuite le Triangle FAD, on remarquera que l'angle AFD d'observation en est connu : l'angle ADF vient d'être découvert, & le côté AD en est donné (supp.); donc (n°. 460.) on pourra connoître les deux distances FA, FD; &, passant au Triangle FDB, on y connoîtra l'angle d'observation DFB, l'angle FDB qui vaut l'angle connu ADB (supp.) moins l'angle ADF que l'on a déja trouvé; de plus le côté DB est donné : on en concluera donc (n°. 460.) la distance FB; & c'est tout C. Q. F. D.

4°. Mais le point donné F peut se trouver sur la circonférence du cercle, que l'on imagineroit passer par les trois points A, B, D (*fig.* K. Pl. 21.). Alors la solution du Problême est impossible.

DÉMONSTRATION.

Car 1°. Pour qu'elle fût possible, il faudroit que ce qui arrive au point F fût particulier à ce point : or les angles d'observation formés en F seroient les mêmes en tout autre point de l'arc AFB; ainsi la solution ne pourroit pas plus lui convenir qu'à tout autre.

2°. Pour résoudre un Problême de cette espèce, il est nécessaire que la seule station permise apporte quelque nouvelle donnée, soit de la part des angles qui s'y forment, soit de la part de leurs côtés. Or on ne peut avoir aucun côté; puisque l'on n'accorde qu'une seule station; & les angles d'observation AFD, DFB, ne font rien connoître de nouveau, car ils sont égaux à des angles donnés; étant évident que l'angle AFD = l'angle donné DBA, & que l'angle DFB = aussi l'angle donné DAB. Le point F ne fait donc rien trouver de nouveau; mais avec rien on ne fait rien; C. Q. F. D.

REMARQUE.

On reconnoîtra que la ſtation donnée F eſt ſur la circonférence qui paſſe par les trois points donnés A, D, B, quand les angles d'obſervation A F D, D F B ſe trouveront égaux aux angles D B A, D A B.

DÉMONSTRATION.

Car ſi, dans cette ſuppoſition, le point donné F n'étoit pas à la circonférence qui paſſe par les points A, B, D, il ſeroit en quelque point S au-dehors (*fig.* K. Pl. 21.) ou en quelque point G au-dedans de cette circonférence : or, en le ſuppoſant au-dehors en S, il ſeroit impoſſible que l'angle d'obſervation A S D égalât l'angle donné A B D; puiſque l'angle B donné a pour meſure la moitié de l'arc A D (n°. 104. *T. I.*); mais l'angle A S D n'a pas pour meſure la moitié de ce même arc; car, en tirant la corde A F, on verra que l'angle A B D = A F D (n°. 104. *T. I.*) : or, A F D > A S D (Coroll. du n°. 65. *T. I.*); donc A B D > A S D; l'angle d'obſervation A S D ne ſçauroit donc être en même tems égal à l'angle A B D donné, & être en-dehors de la circonférencee A D B F.

Pareillement il n'eſt pas poſſible que l'angle d'obſervation A G D, (*fig.* L. Pl. 21.) ſe trouve au-dedans de la circonférence en G, & qu'il ſoit en même tems égal à l'angle donné A B D; ce que vous découvrirez aiſément, en prolongeant D G juſqu'à la circonf. en R, & en tirant la corde R A. Car l'angle A G D extérieur eſt plus grand que l'angle A R D : or A R D = A B D; donc A G D > A B D.

L'angle AFD d'observation ne sçauroit donc se trouver égal à l'angle donné ABD, à moins que cet angle AFD ne se trouve sur la circonférence qui passe par les points A, D, B; & c'est tout C. Q. F. D.

Les Tables des Sinus peuvent encore servir à trouver le rapport approché du diamètre d'un cercle à sa circonférence. Nous avons dit que, suivant Archimède, ce rapport étoit à peu-près comme 7 est à 22, c'est-à-dire, qu'en supposant un diamètre de 7 pieds, la circonférence en a presque 22, un peu moins. Mérius prouve que ce rapport est plus approché, si on le prend comme 113 est à 355. Quelques-uns le prennent comme 100 est à 314. Voyons ce que le calcul des Sinus nous donnera.

PROBLÊME.

475. Trouver le rapport approché du diamètre d'un cercle à sa circonférence (*fig.* 167.).

RÉSOLUTION.

Prenons le Sinus *bd* d'une minute de dégré; en doublant ce Sinus, on aura *da* corde d'un arc de deux minutes: car le Sinus d'un arc est toujours la moitié de la corde du double de cet arc (nº 445.). Il y a 60 minutes au dégré, & par conséquent 30 fois 2 minutes; donc en multipliant par 30 la corde *da*, on aura la valeur de 30 cordes égales à la corde *da*, ou 30 *da* inscrites dans l'arc d'un dégré: le cercle contient 360 dégrés; par conséquent il faut multiplier 30 *da* par 360, pour avoir toutes les cordes de deux minutes inscrites au cercle. Or une corde de deux minutes dans les cercles d'une grandeur médiocre se confond presque entièrement avec son arc; ainsi toutes les cordes de deux minutes inscrites au cercle, prises ensemble, ne sont pas

fensiblement différentes de la circonférence du cercle : nous prendrons donc 30 $da \times 360$ ou 10800 da, c'est-à-dire, un polygone de dix mille huit cens côtés, inscrit à un cercle, pour la circonférence de ce cercle.

Supposons maintenant le Sinus total ou le rayon de ce cercle = 100000 ; les Tables donneront 29 pour le Sinus d'une minute, & par conséquent 29 $\times$ 2 = 58 pour la corde de deux minutes = da : ainsi 10800 da = 10800 $\times$ 58 = 626400 pourra être pris pour sa circonférence. D'ailleurs son rayon étant 100000, le diamètre sera 200000 ; par conséquent le diamètre de ce cercle est à sa circonférence comme 200000 est à 626400 ; & en divisant l'un & l'autre terme de ce rapport par 800, on trouve que le diamètre est à la circonférence, comme 250 est à 783 : c'est donc à dire qu'en supposant le diamètre d'un cercle égal à 250 pouces, la circonférence en contiendra à peu-près 783.

Ainsi, quand on voudra trouver par ce rapport le diamètre d'un cercle, dont la circonférence = 10 pieds, on fera cette règle de trois : 783. 250 :: 10 . x, diamètre cherché ; on trouvera ce diamètre égal à trois pieds $+ \frac{151}{783}$ = 3 pieds, 2 pouces, 3 lignes, $\frac{603}{783}$ de ligne.

FIN.

EXTRAIT DES REGISTRES de l'Académie Royale des Sciences.

Du 15 Janvier 1746.

MEssieurs le Monnier & d'Alembert, qui avoient été nommés pour éxaminer un Ouvrage de M. de la Chapelle, intitulé; *Institutions de Géométrie, &c.* En ayant fait leur rapport, la Compagnie a jugé que cet Ouvrage méritoit son approbation tant par l'ordre & la clarté qui y régnent, que par la méthode nouvelle à plusieurs égards avec laquelle l'Auteur a traité un sujet déja tant de fois manié; en foi de quoi j'ai signé le présent Certificat. A Paris ce 24 Janvier 1746.

GRANDJEAN DE FOUCHY, Sécrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.

Approbation du Censeur Royal.

J'AI lû par ordre de Monseigneur le Chancelier, la nouvelle impression des *Institutions de Géométrie*, & les augmentations que l'Auteur a faites; j'ai crû qu'elles étoient utiles, & ne rendroient l'Ouvrage que plus parfait. A Paris ce 5 Juillet 1757.

MONTCARVILLE, *Lecteur & Professeur Royal.*

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre: A nos amés & féaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans-Civils & autres nos

Justiciers qu'il appartiendra, SALUT. Notre amé JEAN DEBURE l'aîné, Libraire à Paris, ancien Adjoint de sa Communauté, Nous a fait exposer qu'il désireroit faire réimprimer & donner au Public des Livres qui ont pour titre : *Institutions de Géométrie, par M. l'Abbé de la Chapelle ; Le Guide des Accoucheurs par Jacques Menard ; L'Héma-Statique, ou la Statique des Animaux de M. Haley, traduite en François par M. Sauvage, Docteur en Médecine de Montpellier :* s'il Nous plaisoit lui accorder nos Lettres de privilege pour ce nécessaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Exposant, Nous lui avons permis & permettons par ces Présentes, de faire réimprimer lesdits Livres en un ou plusieurs Volumes, & autant de fois que bon lui semblera, & de les vendre, faire vendre & débiter partout notre Royaume pendant le tems de *six* années consécutives, à compter du jour de la date des Présentes : Faisons défenses à tous Imprimeurs, Libraires & autres personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance : Comme aussi d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter, ni contrefaire lesdits Livres, ni d'en faire aucuns extraits sous quelque prétexte que ce soit d'augmentation, correction, changement ou autres, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des Contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Exposant, ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, dommages & intérêts. A la charge que ces Présentes seront enrégistrées tout au long sur le Régistre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelles ; que la réimpression desdits Livres sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caractéres, conformément à la feüille imprimée attachée pour modele sous le contre-scel des Présentes ; que l'Impétrant se conformera en tout aux Reglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725 ; qu'avant de l'exposer en vente, les Imprimés qui auront servi de copie à la réimpression desdits Livres, seront remis, dans le même état où l'approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier, Chancelier de France, le Sieur de LAMOIGNON, & qu'il

en sera ensuite remis deux exemplaires dans notre Bibliothéque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, un dans celle de notredit très-cher & féal Chevalier Chancelier de France le Sieur de LAMOIGNON, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier Garde-des-Sceaux de France le Sieur de MACHAULT, Commandeur de nos Ordres: le tout à peine de nullité des Présentes. Du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Exposant & ses ayans cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement: voulons que la copie des Présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin desdits Livres, soit tenue pour duement signifiée; & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers Sécretaires foi soit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires: Car tel est notre plaisir. Donné à Versailles le vingt-deuxième jour du mois de Novembre, l'an de grace mil sept-cent cinquante-un, & de notre Regne le trente-septième. Par le Roi en son Conseil, SAINSON.

Registré sur le Registre XII. de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris, ensemble la Cession ci-après, N°. 677, folio 536, conformement aux anciens Reglemens, confirmés par celui du 28 Février 1723. A Paris ce 3 Décembre 1751.

LEGRAS, Syndic.

De l'Imprimerie de la Veuve DELATOUR, 1751.

C

B

Fig. 2.

E D C

A B

Fig. 3.

Fig. 6.

Fig 7.

Fig. 8.

A B B D

B A D

M O G S

Fig. 11.

A D B C

Fig. 15.

C M B

A D 3 B C 7

Fig. 14.

Herisset Sculp.



en sera ensuite remis deux exemplaires dans notre Bibliothéque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, un dans celle de notredit très-cher & féal Chevalier Chancelier de France le Sieur de LAMOIGNON, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier Garde-des-Sceaux de France le Sieur de MACHAULT, Commandeur de nos Ordres : le tout à peine de nullité des Présentes. Du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Exposant & ses ayans cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement : voulons que la copie des Présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin desdits Livres, soit tenue pour duement signifiée ; & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers Sécretaires foi soit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires : Car tel est notre plaisir. Donné à Versailles le vingt-deuxième jour du mois de Novembre, l'an de grace mil sept-cent cinquante-un, & de notre Regne le trente-septième. Par le Roi en son Conseil, SAINSON.

Registré sur le Registre XII. de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris, ensemble la Cession ci-après, N°. 677, folio 536, conformement aux anciens Reglemens, confirmés par celui du 28 Février 1723. A Paris ce 3 Décembre 1751.

LEGRAS, Syndic.

De l'Imprimerie de la Veuve DELATOUR, 1751.

C
Fig. 2.
B

E
C
D
Fig. 3.
A
B

Fig. 6.

Fig 7.

Fig. 8.

A
B
B
A
M
O
D
Fig. 11.
G
S
B
D
D

A
D
Fig. 15.
B
C

C
A
D
Fig. 14.
3
M
B
B
C
7

Herisset Sculp.

Fig. 17.

Fig. 19.

Fig. 20.
pag. 24
note (a)

Fig. 23.

Fig. 24.

Herisset Sculp.

D C
ig. 28.
A

D C
Fig. 29.
G
P A
O
S

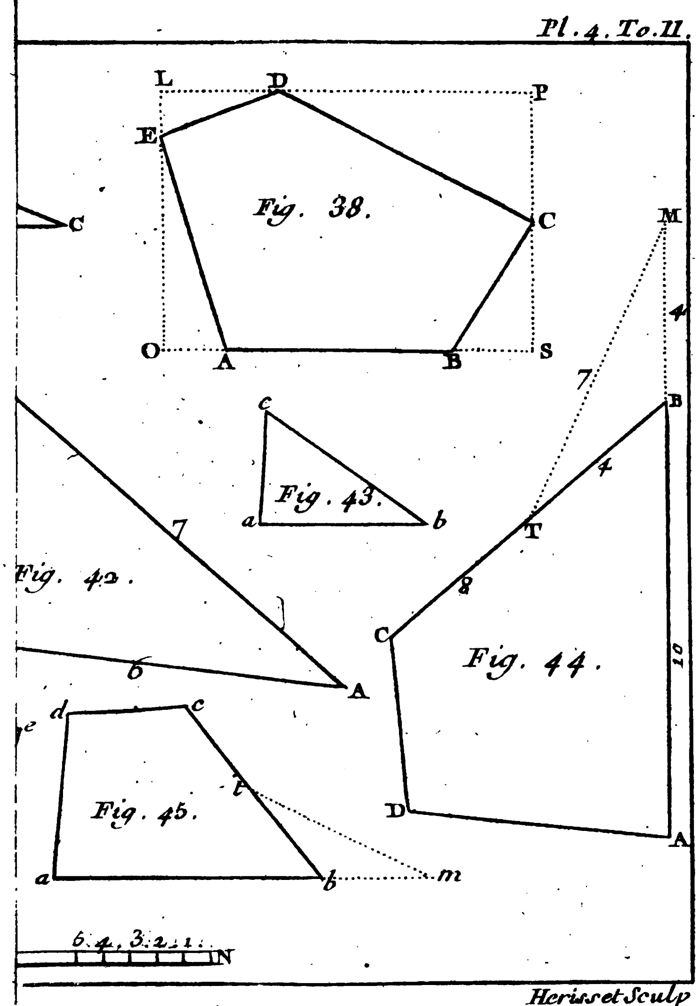
D
F C
Fig. 30.
L
O A B
S

F
D
C O
M
32.
S

D C
Fig. 31.
O B
S

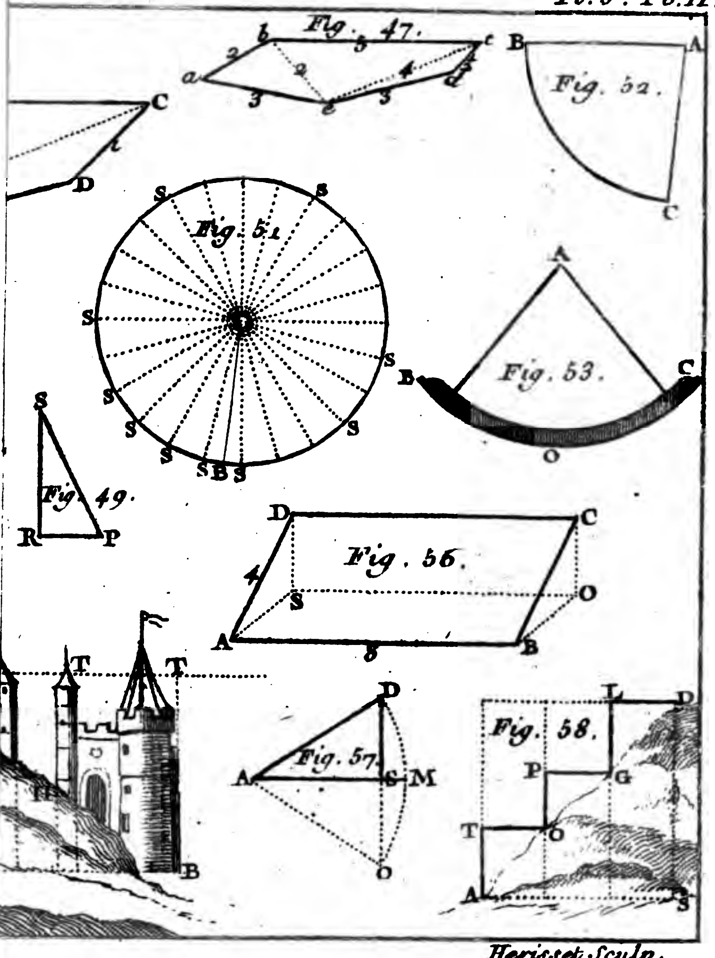
B
6 8
Fig. 34.
A C
10

Herisset Sculp.

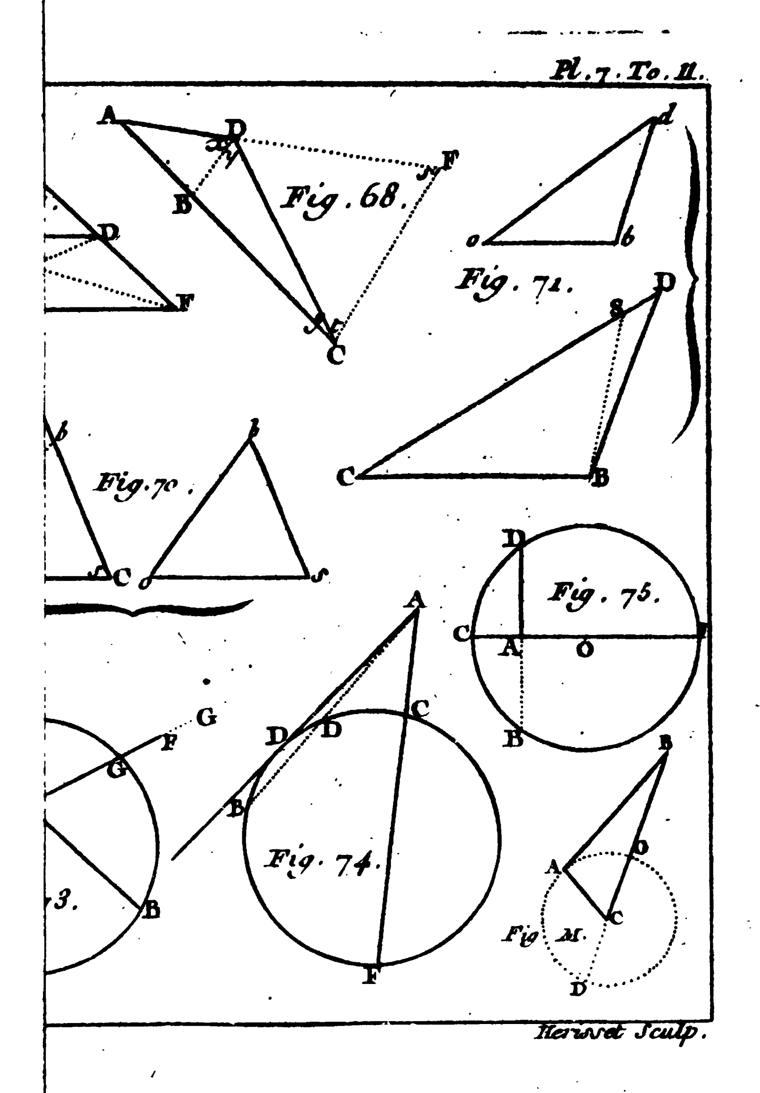


Heriss et Sculp

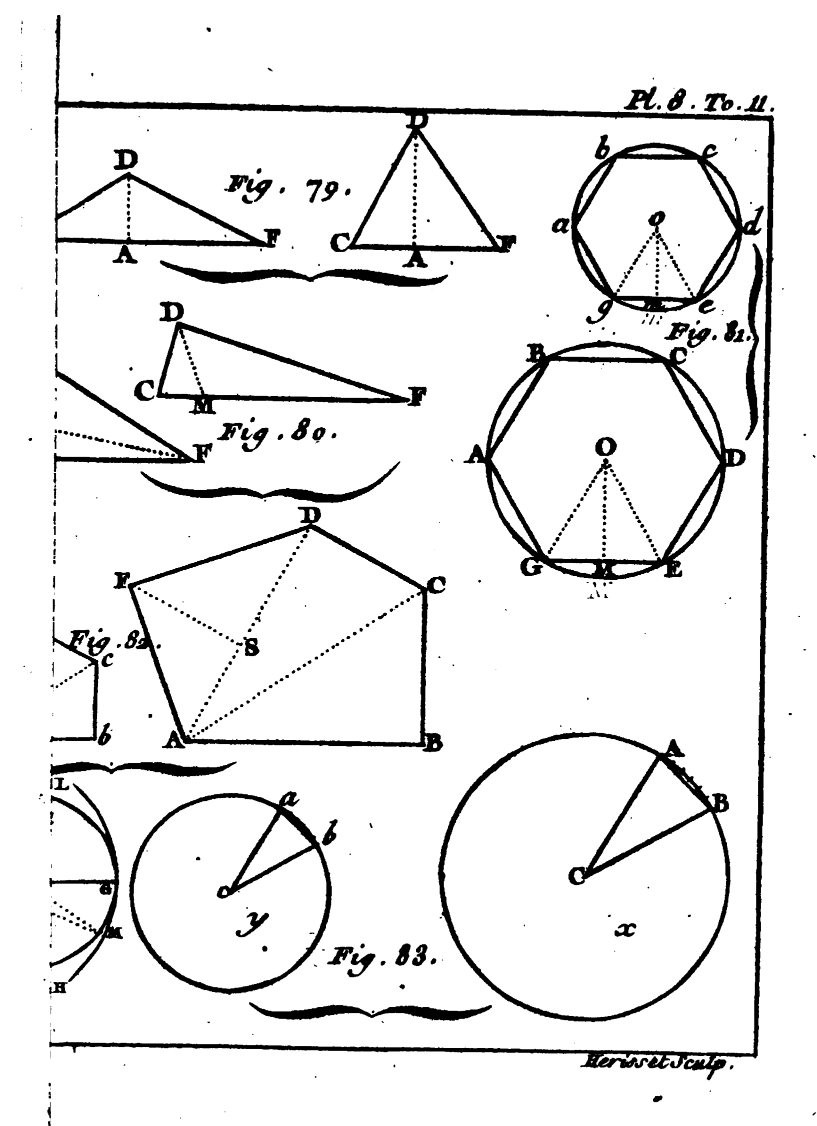
Pl. 5 . To. II.


Fig. 47.
Fig. 52.
Fig. 51
Fig. 53.
Fig. 49.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Herisset Sculp.

Herisset Sculp.


Pl. 7. To. II.
Fig. 68.
Fig. 71.
Fig. 70.
Fig. 75.
Fig. 74.
Fig. M.
Herisset Sculp.

Pl. 8. To. 11.



Herisset Sculp.

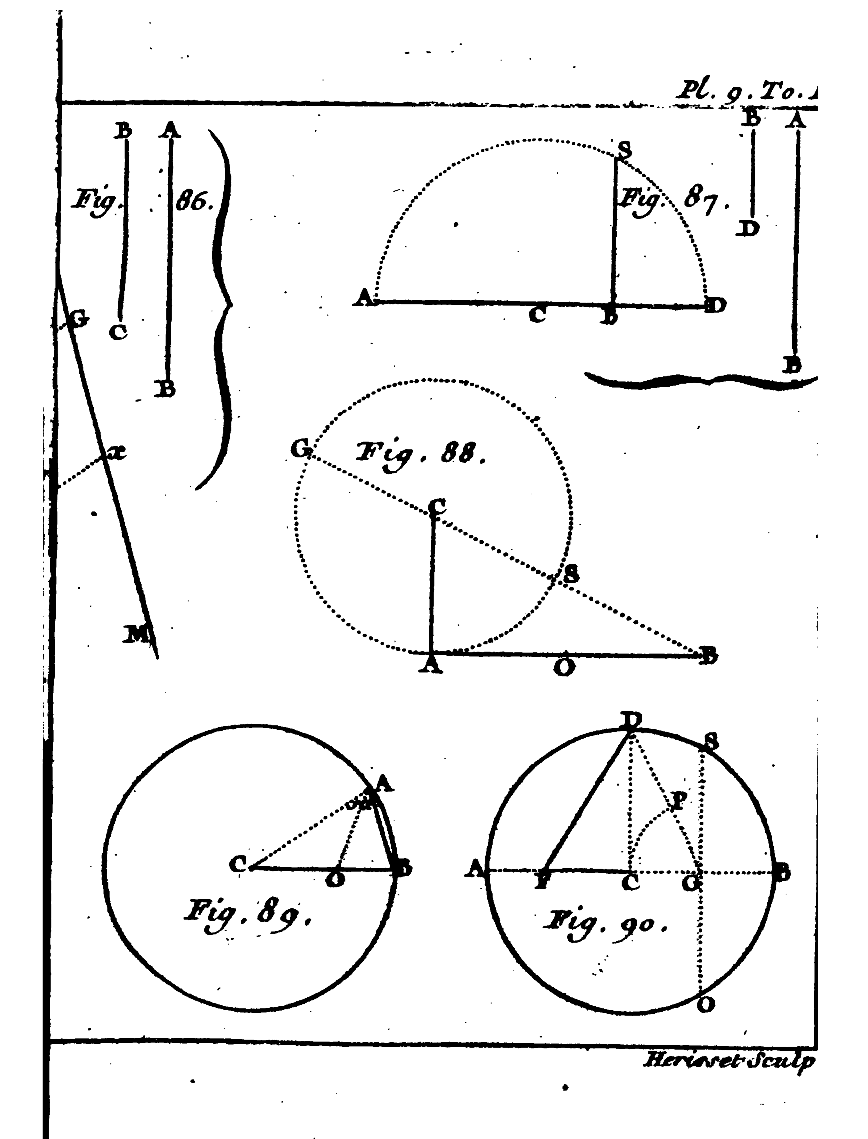

Pl. 9. To.
Fig. 86.
B
A
G
C
B
x
M
Fig. 87.
S
A
C
D
B
D
A
B
Fig. 88.
G
C
S
A
O
B
Fig. 89.
A
C
O
B
Fig. 90.
D
S
P
A
F
C
G
B
O
Heriset Sculp

Fig. 94.

93

96.

Fig. 96.

96.

Fig. 98.

Herisset Sculp.

C A B

M S F D M F

Fig. 100.

S

A B

P

B D

Fig. 101.

P B S

A

y

S B

O

Fig. 102

D C A

Herisset Sculp.

M

D

C

A

B

M S F D M F

Fig. 100.

F

C M

S

A B

P

B D

Fig. 101.

B

P S

A

y

B

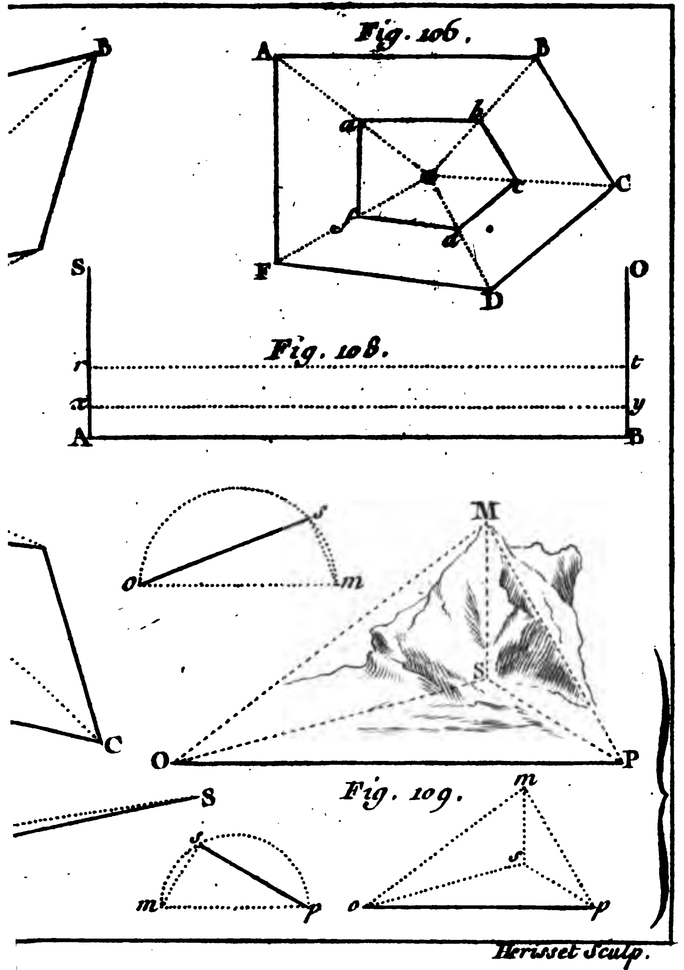
S

O

Fig. 102

D C A

Herisset Sculp.



Herisset Sculp.

Fig. 113.

Fig. 111.

Herisset Sculp.

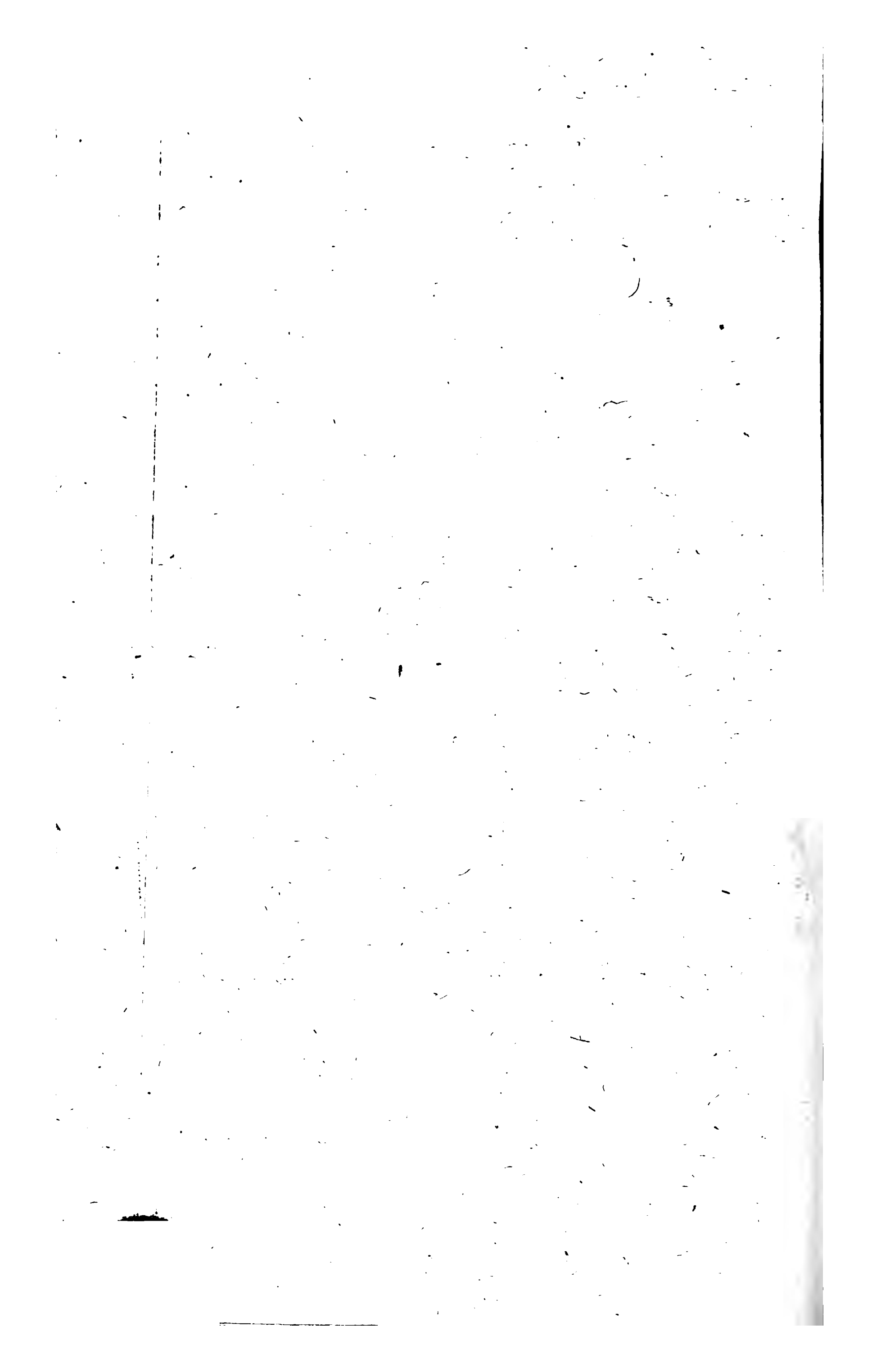


Fig. 116.

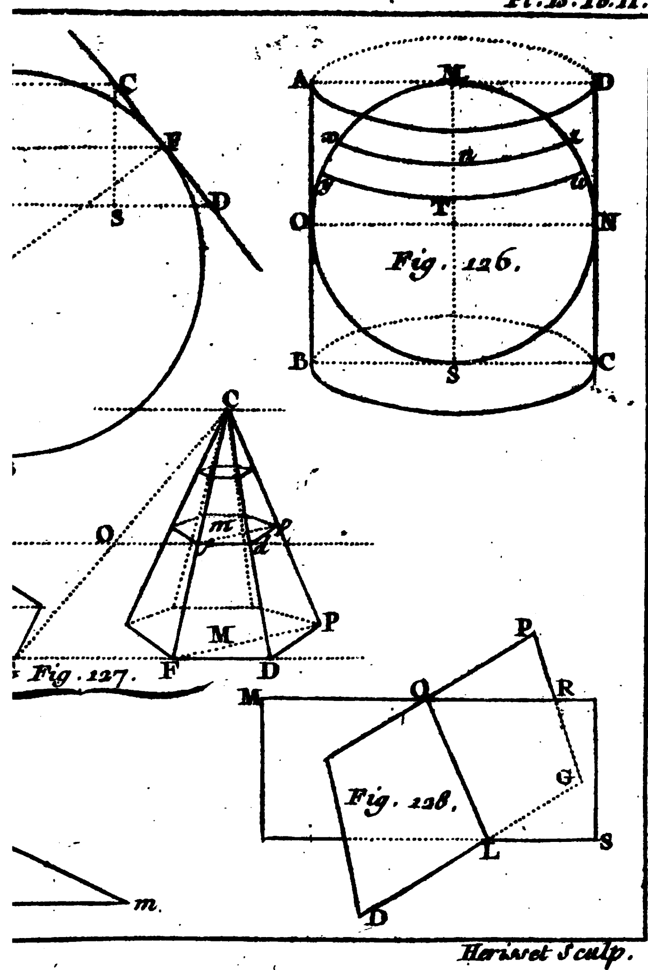
Fig. 118.

Fig. 119.

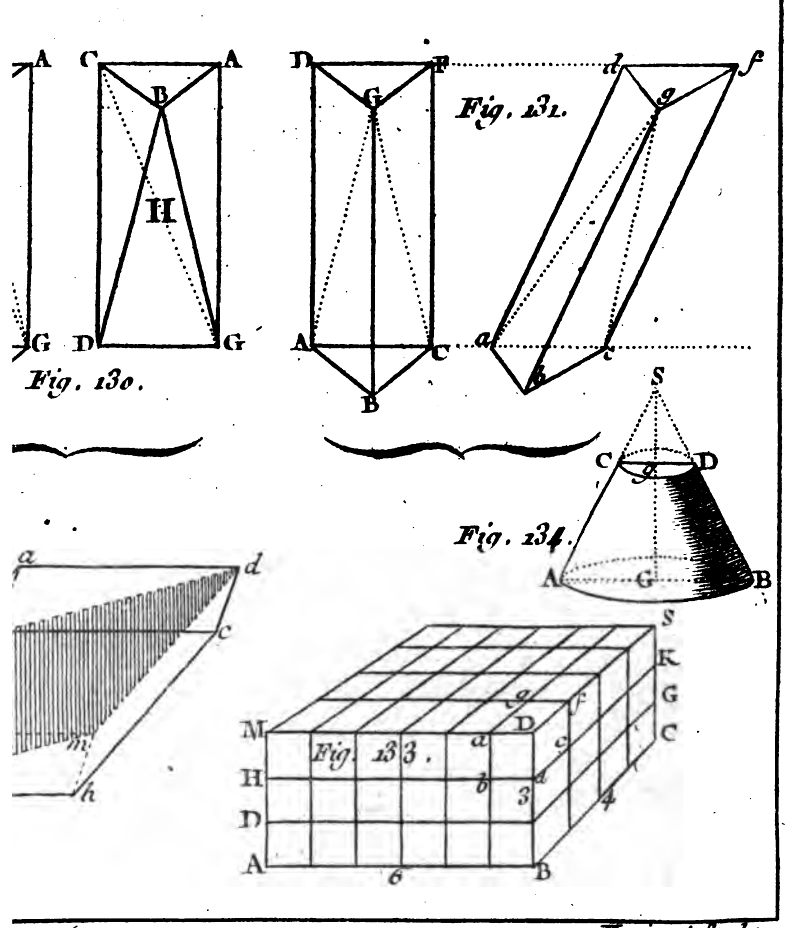
Fig. 120.

Fig. 122.

Herisset Sculp.



Heriset Sculp.



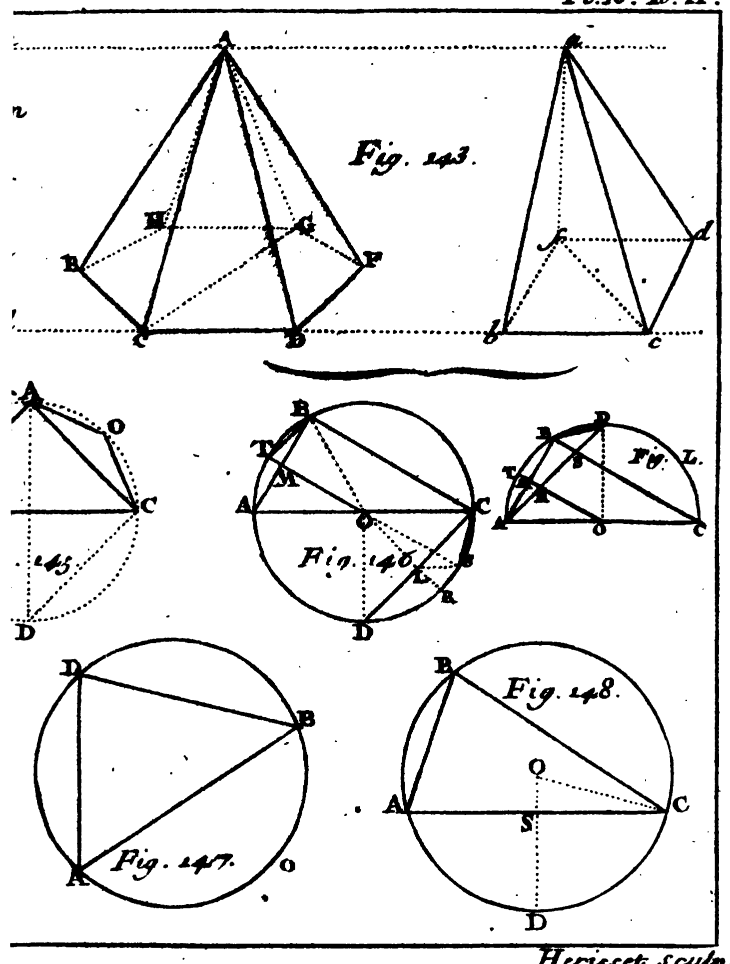
Herisset Sculp.

Fig. 137.

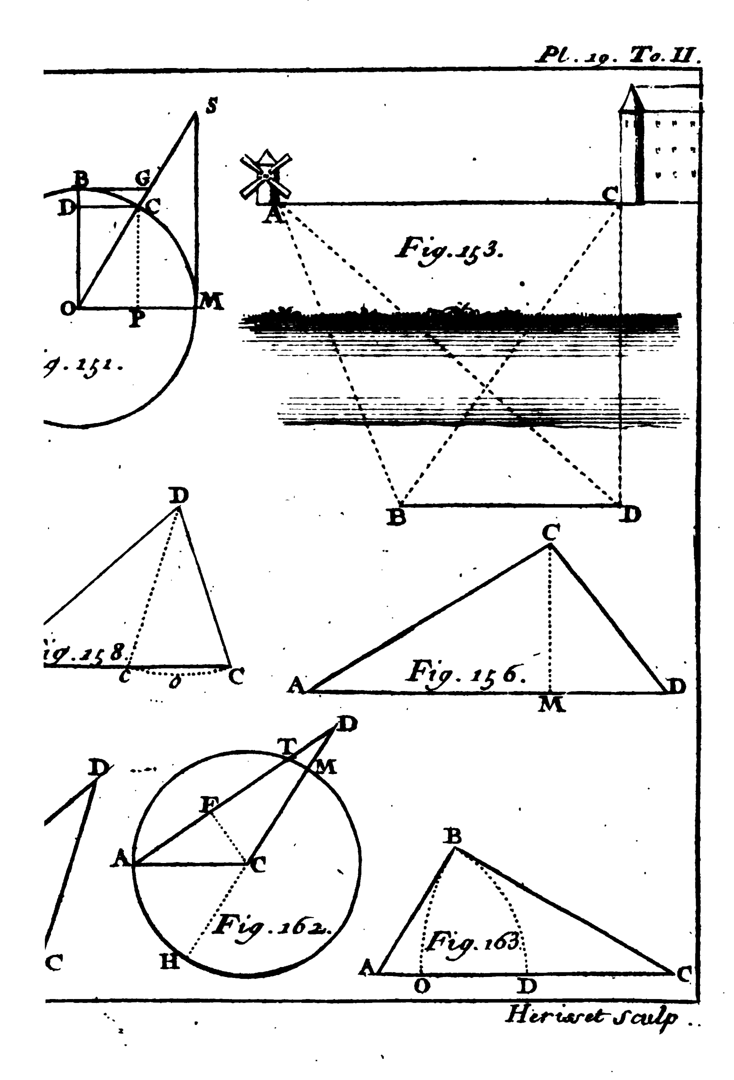
Fig. 141.

Fig. 139.

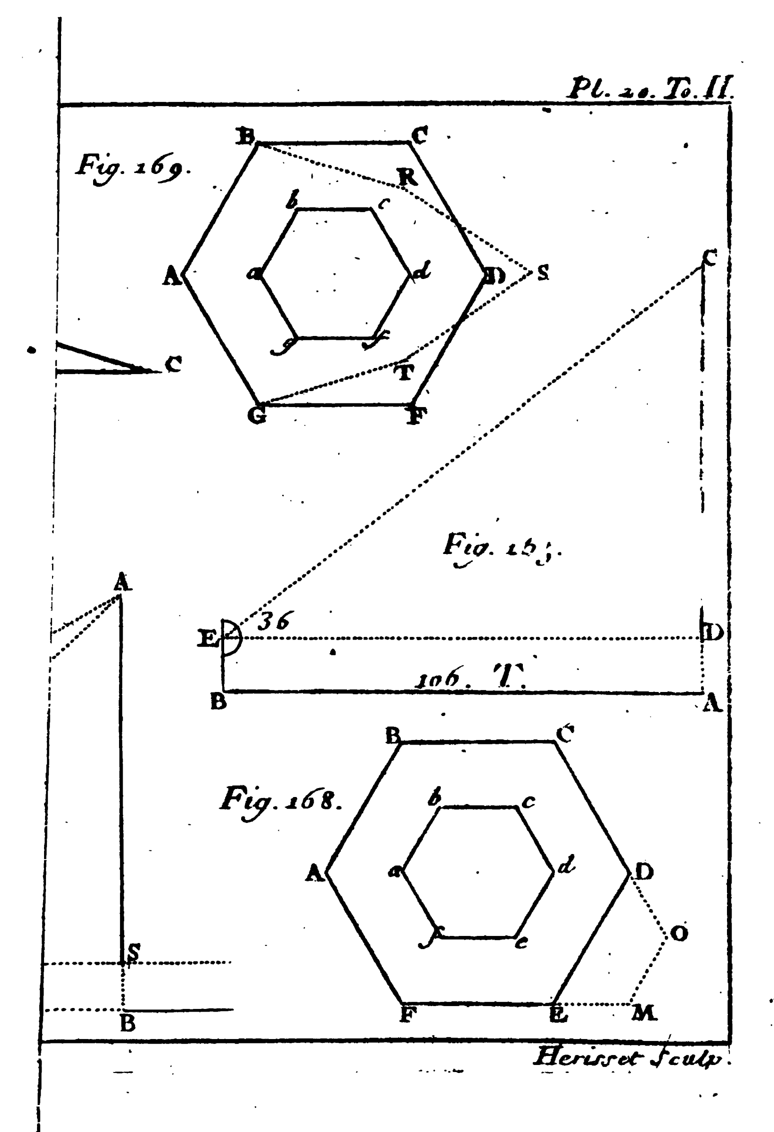
Herisset Sculp.



Herisset sculp.



Heriset Sculp.



Herisset sculp.

X M G

T O P R

E Q D H S Z L G

Fig. Y.

R P T V O K

F M R G L

Fig. L.

D A B G R S